Eine Methode zur Berechnung spezieller Störungen durch Variation der kanonischen Elemente.

Inaugural-Dissertation,

welche

mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Königlichen Universität zu Breslau

nebst den beigefügten Thesen

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

am 8. August 1902, mittags 12 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich verteidigen wird

W. Zimmermann,
Assistent der Kgl. Sternwarte.

Opponenten:

Herr Dr. **W. Ludwig,**
Herr cand. astr. **A. Dinter.**

Breslau.
Druck von Grass, Barth & Comp. (W. Friedrich).

Herrn Professor Dr. J. Franz

Direktor der Königlichen Sternwarte zu Breslau

verehrungsvollst zugeeignet.

Inhaltsübersicht:

Teil I.

1. Einleitung, Stellung der Aufgabe . . . . . Seite 1 bis 2.
2. Inhalt der Untersuchungen Hamiltons, Ableitung der kanonischen Elemente, Hinweis auf die kanonischen Elemente von Charlier . . . . . = 3 = 9.
3. Die Störungen. Die Arbeit von Poisson. Eine Beziehung zu den „Mitteilungen der Sternwarte Breslau", Band I . . . . . = 10 = 12.
4. Die Differentialquotienten der kanonischen Elemente durch R, S, W ausgedrückt. Geometrische und analytische Ableitung. Die projizierende Fläche und die Projektionskurve. Eine Methode zur Verbesserung der Masse des störenden Planeten . . . . . = 12 = 20.

Teil II.

1. Anwendung der entwickelten Methode auf den Cometen Holmes (1892, III) . . = 21.
2. Grundlagen der Rechnung, Bemerkungen über kanonische Elemente. Kanonische Elemente einiger periodischer Kometen. Geometrische Betrachtung des Rechnungsganges. Die Tafeln. Schema und Resultate der Rechnungen . . . . . = 22 = 30.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549813_0084

Teil I.

1.

Die mathematisch interessanteste Methode der Störungsrechnung ist wohl die sog. „Methode der Variation der Konstanten", welcher ein analytisch überhaupt sehr fruchtbarer Gedanke zu Grunde liegt.

Auch vom astronomischen Standpunkte aus verdient jene Methode einen gewissen Vorzug, und zwar — abgesehen von praktischen Gründen — insofern, als sie das Problem, so wie es uns die Natur stellt, möglichst direkt faßt und zu lösen sucht.

In erster Näherung geht die Planeten-Bewegung in Ellipsen vor sich. Berücksichtigt man aber die relativ kleinen gegenseitigen Einwirkungen der Planeten, so treten bald Abweichungen von diesen einfachen Bewegungsgesetzen auf.

Daraus folgt nun, daß auch die Bahn des gestörten Körpers, die man für einen bestimmten Augenblick durch 6 Konstanten, die „Bahnelemente", festzulegen pflegt, sich wegen der beständig wirkenden Störungen ununterbrochen ändern wird, und zwar durchaus stetig, wenn auch nach ziemlich verwickelten Gesetzen. Aus einer einfach gekrümmten Kurve wird die Bahn in eine Raumkurve übergehen, der Radiusvektor des Planeten wird eine abwickelbare Fläche beschreiben.

Streng genommen müßte man also von Moment zu Moment andere 6 die Bahn definierende Konstanten einführen, d. h. mathematisch gesprochen die Aufgabe lösen, jenes Konstantensystem als Funktion der Zeit darzustellen.

Dem rein mechanischen Problem der Bahnbewegung liegen 3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu Grunde und die 6 Bahnelemente sind nichts anderes, als die zur allgemeinen Lösung erforderlichen 6 Integrationskonstanten.

In dieser Hinsicht enthalten jene 6 Größen etwas Willkürliches, und die konventionell eingeführten Elemente der Bahn

a = halbe große Axe,
e = (numerische) Exzentrizität,
i = Neigung gegen eine bestimmte Grundebene,
Ω = aufsteigender Knoten auf dieser Grundebene,
ω = Länge des Perihels von Ω ab,
M = mittlere Anomalie,

sind nicht die einzigen, welche unserem Problem Genüge leisten. Jedoch zeichnen sie sich ganz besonders durch Anschaulichkeit und praktische Brauchbarkeit aus. Man hat sie übrigens nicht aus den Differentialgleichungen ursprünglich hergeleitet, sondern sie entstanden im Laufe der Zeit aus der Praxis. Teilweise führte sie Kepler ein.

Sucht man also jene 6 Größen dem Prinzip der Variation der Konstanten gemäß als Funktionen der Zeit darzustellen, so handelt es sich um die Entwicklung der Werte von $a' \equiv \frac{da}{dt}$, e', i', Ω', ω', M'.

Jede Centralbewegung gehört zu den mechanischen Problemen, welche eine Kräftefunktion besitzen; sie erhält bei Berücksichtigung störender Kräfte einen Zusatz durch die Störungsfunktion. Für die vorliegenden Zwecke erscheint es angemessen, 3 aufeinander senkrechte Komponenten der störenden Kraft zu betrachten, die übrigens in einem einfachen Zusammenhang mit den Differentialquotienten der Störungsfunktion stehen. Es sind dies folgende:

1. eine Kraft R in der Richtung des Radiusvector,
2. eine Kraft S senkrecht dazu in der Bahnebene,
3. eine Kraft W senkrecht zu den beiden vorigen und auf der Bahnebene;

wir wollen sie der Reihe nach als radiale, transversale und orthogonale Komponente bezeichnen.

Mit ihrer Hilfe fand man folgende Ausdrücke für die Differentialquotienten der Elemente:

$$(1)\quad \begin{cases} a' = \dfrac{2a^2}{k\sqrt{p}}\,(e\sin v\cdot R + \dfrac{p}{r}\,S), \\ e' = \dfrac{1}{k\sqrt{p}}\,(p\sin v R + p\,(\cos v + \cos E)\,S), \\ i' = \dfrac{r\cos u}{k\sqrt{p}}\,W, \\ \Omega' = \dfrac{r\sin u}{k\sqrt{p}\sin i}\,W, \\ \omega' = \dfrac{1}{k\sqrt{p}}\,\{-p\cos v\,R + (p+r)\sin v\,S\} - \cos i\,\Omega', \\ M' = -\sqrt{1-e^2}\,(\omega' + \cos i\,\Omega') - \dfrac{2r\sqrt{1-e^2}}{k\sqrt{p}}\,R + \int \dfrac{d\mu}{dt}\,dt. \end{cases}$$

Die Bezeichnung ist die allgemein übliche: p = Parameter der Bahn, v = wahre Anomalie, $u = v + \omega$, μ = mittlere tägliche Bewegung.

Ferner ergiebt sich mit Benutzung der Differentialquotienten der Störungsfunktion Ω:

$$(2)\quad \begin{cases} a' = \dfrac{2\sqrt{a}}{k}\cdot\dfrac{d\Omega}{dM}, & \Omega' = \dfrac{1}{k\sqrt{p}\sin i}\cdot\dfrac{d\Omega}{di}, \\ e' = \dfrac{p}{kea^{3/2}}\cdot\dfrac{d\Omega}{dM} = -\dfrac{\sqrt{p}}{kea}\cdot\dfrac{d\Omega}{da}, & \omega' = \dfrac{\sqrt{p}}{kea}\cdot\dfrac{d\Omega}{da} - \dfrac{\operatorname{cotg} i}{k\sqrt{p}}\cdot\dfrac{d\Omega}{di}, \\ i' = \dfrac{\operatorname{cotg} i}{k\sqrt{p}}\cdot\dfrac{d\Omega}{d\omega} = -\dfrac{1}{k\sqrt{p}\sin i}\cdot\dfrac{d\Omega}{d\Omega}, & M' = \mu\left(1 - \dfrac{2a^2}{k^2}\cdot\dfrac{d\Omega}{da} - \dfrac{p}{k^2 e}\cdot\dfrac{d\Omega}{de}\right). \end{cases}$$

Man erkennt aus (1) und (2), daß die Ableitungen der Elemente auf diese Art verhältnismäßig kompliziert werden, und so lag bei fortschreitender Entwicklung der Theorie die Frage nicht fern, ob nicht durch eine geeignetere Wahl der 6 Integrationskonstanten sich die Formeln (1) und (2) vereinfachen ließen. Zunächst ist klar, daß z. B. irgend 6 von einander unabhängige Funktionen der gewählten Integrationskonstanten ebenfalls den Differentialgleichungen Genüge leisten werden. Aber die Bestimmung derartiger Funktionen hat man völlig in der Hand, und so kommt alles darauf hinaus, womöglich solche Funktionen der Elemente als neue Konstanten einzuführen, dass (1) und (2) eine recht einfache, übersichtliche Gestalt erhalten. Es gilt hier der Satz, daß die Form der Schlußgleichungen lediglich von der Wahl der Konstanten abhängt. Hat man solche Funktionen gefunden, so kann man sie ohne weiteres an Stelle von $a, e, i, \ldots$ als „Bahnelemente“ definieren; bei der Wahl wird es weniger darauf ankommen, daß die neuen Elemente gerade eine so einfache geometrische Interpretation wie die alten zulassen, obwohl man sich natürlich bemühen wird, möglichst charakteristische, einfache Größen zu wählen. Dahingehende Untersuchungen sollen Gegenstand des Folgenden sein.

2.

Ein räumliches System von 2 Körpern, deren Massen bezw. die Einheit und m_1 in Teilen derselben seien, legen wir für einen bestimmten Zeitpunkt t_0 im 3 dimensionalen Raum durch 3 Größen q_i für jeden Körper fest. Diese q_i definieren wir als Koordinaten im weitesten Sinne. $q'_i = \frac{dq_i}{dt}$ $(i = 1, 2, \ldots 6.)$ seien die Geschwindigkeiten der Koordinaten. Ferner definieren wir 6 Größen p_i durch die Gleichungen

$$q'_i = m_i\, p_i.$$

Die potentielle Energie unseres Systems, die nur von der Lage der Glieder desselben, also von den q, abhängt, ist dann

$$U = k^2\, \Sigma_\varkappa\, \Sigma_\lambda\, \frac{m_\varkappa\, m_\lambda}{\Delta_{\varkappa\lambda}},\ (\varkappa \neq \lambda)$$

wo Δ die Entfernung bedeutet, während die kinetische Energie in der Form

$$2T = \Sigma_i\, p_i\, q'_i$$

erscheint. T ist also auch eine quadratische Form in den q'_i. T und U sind von der Zeit unabhängig, es sei denn, daß im Verlauf der Bewegung durch äußere Einflüsse Massenänderungen in dem System eintreten, oder etwa die Bewegung in einem widerstehenden Mittel stattfindet.

Beides soll bei der Planetenbewegung ausgeschlossen sein.

Denkt man sich das System in Ruhe, so kann man nach Thomson die p als Komponenten derjenigen Momentankraft betrachten, welche erforderlich wäre, um den Koordinaten q_i die Geschwindigkeiten q'_i zu erteilen. T hängt ersichtlich nur von den p_i ab.

Wir gehen jetzt auf die Untersuchungen Hamiltons ein und führen mit ihm 2 neue Funktionen ein: die „Hamiltonsche Funktion“

$$H = T - U^*).$$

und dann die „charakteristische Funktion“

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt = \int_{t_0}^{t} \Sigma (p_i \frac{dq_i}{dt})' dt.$$

Es läßt sich der Inhalt der Hamiltonschen Untersuchungen kurz dahin angeben, dass man mit Hilfe von V und H nicht nur die Differentialgleichungen der Bewegung in ihrer kanonischen Form, sondern auch sofort die Integralgleichungen aufstellen kann. Erstere erscheinen nämlich in der Form

$$(1)\quad q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad p'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

und ergeben schließlich $H = T\ (t, c_1, c_2 \ldots c_{2i})$. — Aus (1) folgen die Integralgleichungen

$$(2)\quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i,\quad \frac{\partial V}{\partial q_{io}} = -p_{io}.$$

Dabei ist $p_{io} = \lim_{t=t_0} p_{io}$, ähnlich q_{io}. Die ersten Gleichungen (2) entsprechen den „ersten Integralen“, während die letzten Gleichungen den endlichen Gleichungen zwischen den Koordinaten entsprechen.

*) Auch Lagrangesche Funktion genannt, da sie schon von Lagrange eingeführt wurde.

Den Inhalt der Gleichungen (1) und (2) können wir in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz: „Sind die Gleichungen $q'_i = \frac{\partial H}{\partial pi}$ *und* $p'_i = -\frac{\partial H}{\partial qi}$ gegeben und bildet man eine Funktion $V = \int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt$, (das „Wirkungsintegral") und kann man dieses Integral als Funktion von $3n$ Konstanten α_i darstellen (n bedeutet die Anzahl der Glieder des Systems), so sind die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

die Integrale der ursprünglich gegebenen Gleichungen, und zwar sind die α_i einfach die q_{io} und die βi entsprechen den $-p_{io}$".

Der besondere Vorzug der von Hamilton eingeführten Betrachtungen ist die Unabhängigkeit von der Art der Koordinaten.

Die Größe V genügt einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die praktisch bisweilen, im allgemeinen jedoch nicht lösbar ist. Die Forschungen Hamiltons kommen daher andererseits darauf hinaus, an Stelle der ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung jene alsbald zu ermittelnde, nicht lineare partielle Differentialgleichung für V zu integrieren. Sie ist erster Ordnung und lautet

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \alpha = 0.$$

Durch Integration findet man hieraus

$$(4) \quad V + \alpha \cdot t = W.$$

Hier ist W die Konstante der Integration bezüglich t; es ist eine ähnliche Funktion wie H. Durch Differentiation von (4) nach q_i erhält man $\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{dW}{\partial q_i}$.

Für unseren speziellen Fall sollen nun wirklich die 6 Integrationskonstanten (Elemente) bestimmt werden. Wenngleich schon Jacobi („Vorlesungen über Dynamik," Vorl. 24) diesen Gegenstand in vollendeter Form abgehandelt hat, soll hier dennoch eine kurze Ableitung gegeben werden, und zwar mit einigen Abänderungen; hauptsächlich handelte es sich darum, durch eine Änderung in den einzuführenden Konstanten in den späteren Rechnungen das Auftreten imaginärer Größen zu vermeiden.

In unserer Aufgabe setzen wir für die q_i und p_i, deren Wahl uns ja freisteht, die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y, z und ihre Ableitungen nach t, $\frac{dx}{dt} \equiv x'$, y', z'. Ferner wählen wir gleich den Körper mit der Masse 1 — die Sonne — als Ursprung des Koordinatensystems. Ist $r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ der Abstand des zweiten Körpers vom ersten, so können wir nach Einführung der Winkel β und λ (Länge und Breite) die heliocentrischen Polarkoordinaten des zweiten Körpers schreiben in der Form

$$(0). \quad r \cos\beta \cos\lambda = x,\ r \cos\beta \sin\lambda = y,\ r \sin\beta = z.$$

Für die Kräftefunktion erhält man den Ausdruck

$$U = \frac{k^2}{r},$$

die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Gleichung (3) des letzten Abschnittes erscheint hier schließlich in der Gestalt

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{k^2}{r} = 0, \text{ oder da } p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}:$$

$$(1). \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\} - \frac{k^2}{r} = 0.$$

Gelingt es uns, eine Funktion V so zu finden, daß sie dieser Gleichung genügt und drei Konstanten enthält, so haben wir sofort die Lösung unseres Problems. Rechnet man mit Benutzung von (0) die Werte für $\frac{\partial V}{\partial x}$ etc. wirklich aus, so geht (1) über in

$$(2). \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2\beta}\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\right)^2\right\} - \frac{k^2}{r} = 0.$$

In dieser Gleichung sind t und λ nicht explizite enthalten, d. h. λ spielt eine ähnliche Rolle wie t, und man kann setzen

$$(3). \quad V = \alpha_1 t + \alpha_2 \lambda + W.$$

Hier sind α_1 und α_2 Integrationskonstanten. Es folgt also:

$$(4.) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \alpha_1; \; \frac{\partial V}{\partial \lambda} = \alpha_2; \; \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r}; \; \frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{W\partial}{\partial \beta}.$$

Die Ergebnisse aus (4) setzen wir in (2) ein, nachdem wir beide Seiten dieser Gleichung mit 2 multipliziert haben.

Wir erhalten:

$$(5). \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)^2 + \frac{\alpha_2{}^2}{\cos^2\beta}\right] = \frac{2k^2}{r} - 2\alpha_1.$$

Es handelt sich also noch darum, eine Funktion W der Größen r und β so zu finden, daß sie erstens der Differentialgleichung genügt, ferner aber noch eine Konstante — nämlich λ — enthält. Gelingt das, so sind die Differentialquotienten von W nach den Integrationskonstanten die Lösung.

Hier wendet Jacobi einen analytischen Kunstgriff auf (5) an, dessen Hauptwirkung die Trennung der Variabeln in Gleichung (5) ist, die gleichzeitig in 2 Teile zerfällt.

Jacobi setzt nämlich

$$(6,1.) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{\cos^2\beta} = \alpha_3{}^2,$$

woraus sofort folgt

$$(6,2.) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_3{}^2}{r} = \frac{2k^2}{r} - 2\alpha_1.$$

Es sei nun abkürzend eingeführt

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)^2 = B, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = R,$$

oder

$$(7). \quad \sqrt{\alpha_3{}^2 - \frac{\alpha_2{}^2}{\cos^2\beta}} = \sqrt{B}, \quad \sqrt{-2\alpha_1 + \frac{2k^2}{r} - \frac{\alpha_3{}^2}{r^2}} = \sqrt{R}.$$

B ist nur Funktion von β, R nur Funktion von r.

Aus (5) folgt mit Benutzung von (7):

$$(5a). \quad W = \int \sqrt{B}\, d\beta + \int \sqrt{R}\, dr.$$

Hier sind die unteren Grenzen der Integrale zunächst unbestimmt; in Rücksicht auf die Bedeutung von r und β wollen wir jedoch 0 und r_1 als solche einführen.

β ist ja die variable Breite des Planeten, und wir beginnen die Integration in dem Augenblick, in welchem der Planet die Ekliptik durchschneidet, β also gerade Null ist. —

Aus der zweiten Gleichung (7) erhält man ferner

$$r^2R = -2\alpha_1 r^2 + 2k^2 r - \alpha_3^2,$$

und es stellt $y = -2\alpha_1 r^2 + 2k^2 r - \alpha_3^2$ eine Parabel dar, deren Scheitel die Koordinaten $\xi = -\frac{k^4 - 2\alpha_1\alpha_3{}^2}{4\alpha_1{}^2}$ und $\eta = +\frac{k^2}{2\alpha_1}$ hat; ihre Schnittpunkte mit der x-Achse folgen aus der quadratischen Gleichung $r^2 - \frac{k^2 r}{\alpha_1} + \frac{\alpha_3{}^2}{2\alpha_1} = 0$, und zwar bekommt man

$$r = \frac{k^2}{2\alpha_1} \pm \frac{1}{2\alpha_1}\sqrt{k^4 - 2\alpha_1\alpha_3{}^2}.$$

Dieser Ausdruck ist reell, sofern $k^4 - 2\alpha_1\alpha_3{}^2 \geqq 0$ ist. Was zunächst die Homogeneität dieser Formel anlangt, so ist k^4 als Quadrat einer Größe dritter Dimension*) der Dimensionalität nach mit 6 zu bezeichnen. Wie bald sich zeigen wird, sind α_1 und α_3 zweiter Dimension, so daß r, wie es erforderlich ist, in der That als eine Größe erster Dimension sich ergiebt. Es sei nun r_1 die kleinere, r_2 die größere Wurzel unserer quadratischen Gleichung, dann kann man schreiben

$$R = \alpha_3{}^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right);$$

für $r = r_1$ und r_2 verschwindet R. r_1 ist der Minimal-, r_2 der Maximalwert von r, und nur innerhalb dieser Grenzen ist r reell. r_1 bezeichnet also den Perihelabstand, und im Perihel nimmt das Integral seinen Anfang.

Nachdem wir so eine den früher gestellten Bedingungen entsprechende Funktion W gefunden haben, die von den 3 Konstanten α_1, α_2, α_3 abhängt, erhalten wir aus (3):

$$(8). \quad V = \alpha_1 t + \alpha_2\lambda + \int_0^{\beta}\sqrt{B}\,d\beta + \int_{r_1}^{r}\sqrt{R}\,dr.$$

Wir haben nun zu bilden für $i = 1, 2, 3$ $\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i$; es sind die β_i die 3 neuen Konstanten, denen man diese Differentialquotienten gleich zu setzen hat.

Mit Rücksicht darauf, daß

$$(9). \quad R = f(\alpha_1, \alpha_3) \text{ und } B = \varphi(\alpha_2, \alpha_3)$$

ist, erhalten wir folgende Ergebnisse:

$$\beta_1 \equiv \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = t - \int_{r_1}^{r}\frac{dr}{\sqrt{R}} + \left[\sqrt{R}\right]_{r_1}^{r}.$$

Das letzte Integral in (8) erscheint nämlich zweifach von α_1 abhängig, einmal als Funktion von R, dann aber dadurch, daß R von α_1 abhängt. Wir haben also

$$\beta_1 = t - \int_{r_1}^{r}\frac{dr}{\sqrt{R}} - \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2k^2}{r_1} - \frac{\alpha_3{}^2}{r_1{}^2}}\cdot\frac{\partial r}{\partial \alpha_1},$$

r_1 war jedoch Nullstelle des Radikanden, so daß wir einfach erhalten

$$(a). \quad \beta_1 = t - \int_{r_1}^{r}\frac{dr}{\sqrt{R}}.$$

*) Vergl. hierüber etwa Encke, Berl. Jahrb. 1855, S. 320.

Damit ist die erste Konstante definiert. In ganz analoger Weise differenzieren wir (8) nach α_2 und α_3, und gelangen unter steter Beachtung von (9) schließlich zu den Resultaten

$$(b). \quad \beta_2 = \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \lambda - \int_{r_1}^{r} \frac{\alpha_2 \cdot d\beta}{\cos^2\beta \sqrt{B}},$$

und

$$(c). \quad \beta_3 = \frac{\partial V}{\partial \alpha_3} = \alpha_3 \int_0^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{B}} - \alpha_3 \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{R}}.$$

In den Gleichungen (a), (b), (c) sind also die Variablen getrennt. Da unter den Wurzelzeichen nur Funktionen zweiten Grades stehen, werden wir auf Kreisfunktionen kommen.

Eine Zusammenfassung des Bisherigen giebt uns nun folgendes Gleichungssystem zur Definition unserer 6 Konstanten:

$$\begin{cases} r^2 - \dfrac{k^2 r}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_3^2}{2\alpha_1} = 0, & \beta_1 = t - \displaystyle\int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{R}}, \\ r_1 + r_2 = \dfrac{k^2}{\alpha_1}, & \beta_2 = \lambda - \alpha_2 \displaystyle\int_0^{\beta} \frac{d\beta}{\cos^2\beta \sqrt{B}}, \\ r_1 r_2 = \dfrac{\alpha_3^2}{2\alpha_1}; & \beta_3 = \alpha_3 \left(\displaystyle\int_0^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{B}} - \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{R}} \right). \end{cases}$$

Wir hatten gesehen, daß r_1 und r_2 die Extremwerte des Radiusvektors sind, und setzen daher, wenn wir unter $a, e, \ldots$ die bekannten Bahnelemente verstehen:

$$r_1 = a(1 - e), \qquad r_2 = a(1 + e),$$

also

$$2a = \frac{k^2}{\alpha_1},$$

und daraus folgt das erste Ergebnis

$$(10). \quad \underline{\alpha_1 = \frac{k^2}{2a}}.$$

Satz: „Abgesehen von einem Zahlenfaktor ist α_1 die Konstante, welche in der Gleichung der lebendigen Kraft auftritt. Diese Gleichung lautet, wie aus den Grundlagen der Bahnberechnung bekannt ist,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - \frac{2k^2}{r} + \frac{k^2}{a} = 0.“$$

Aus (10) ersehen wir sofort, dass α_1 die Dimension $3 - 1 = 2$ hat.

Da $r_1 r_2 = a^2 (1 - e^2)$ ist, folgt weiter

$$(11). \quad \underline{\alpha_3 = k\sqrt{p}} = k\sqrt{a(1 - e^2)}.$$

$p = a(1 - e^2)$ ist der Parameter der Bahnellipse. In Erinnerung an die Beziehung $r^2 v' = k\sqrt{p}$ können wir daher aussprechen den

Satz: „Die Konstante α_3 bedeutet die Flächengeschwindigkeit des Körpers, d. h. die in der Zeiteinheit vom Radiusvektor überstrichene Fläche.“

Man überzeugt sich sofort, daß α_3 die Dimension $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ hat.

Ehe sich α_2 ergiebt, müssen wir erst β_1 bestimmen. Betrachten wir die vierte Gleichung unserer vorstehenden Zusammenstellung. Für $r = r_1$, also im Perihel, verschwindet das Integral und es ergiebt sich daher $\beta_1 = t$, gleich der Zeit des Periheldurchganges. Wir bezeichnen diese Zeit mit T, und bekommen

$$(12). \quad \underline{\beta_1 = T.}$$

In Worten: „Die Konstante β_1 bezeichnet die Zeit des Periheldurchganges."

Bei elliptischen Bahnen, und auf solche werden wir unsere Untersuchungen später nur anwenden, enthält β_1 eine gewisse Periodizität. Seiner Natur nach muß β_1 stets reell sein, was dann auch für den in seiner Definitionsgleichung vorkommenden Wurzelausdruck (7)

$$\sqrt{\alpha^2_3 - \frac{\alpha^2_2}{\cos^2\beta}}$$

gilt. Ähnlich wie bei früheren Überlegungen werden daher aus der Gleichung $\alpha^2_3 - \frac{\alpha^2_2}{\cos^2\beta} = 0$ die reellen Extremwerte von β folgen. (An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß β_1 mit β nichts zu thun hat.) Eine einfache geometrische Überlegung zeigt nun, daß diese Extremwerte nichts anderes als $\pm i$ sein müssen, unter i die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik verstanden.

Es folgt dann aus der letzten Gleichung $\alpha^2_2 = \alpha^2_3 \cos^2 i$, oder

$$(13). \quad \underline{\alpha_2 = \alpha_3 \cos i = k\sqrt{p}\cos i.}$$

Satz: „Die Konstante α_2 ist die Projektion des Flächenelementes auf eine unter dem Winkel i gegen dasselbe geneigte Ebene."

In dieser Konstanten tritt zuerst ein Datum auf, welches die Lage der Bahnebene bestimmt, während bisher nur Bestimmungsstücke für die Bahnkurve selbst vorkamen.

Befindet sich der Planet etwa im aufsteigenden Knoten, so ist $\beta = 0$ und aus der vorletzten Gleichung unserer Zusammenstellung ergiebt sich β_2 gleich der Länge des Knotens, die wir üblicherweise mit Ω bezeichnen.

$$(14). \quad \underline{\beta_2 = \Omega.}$$

Zur Ermittelung von β_3 endlich empfiehlt sich eine getrennte Betrachtung der beiden in der Definitionsgleichung auftretenden Integrale und für das erste derselben die Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen in dem Argument der Breite, das u genannt sei. Die Breite des Planeten hängt nämlich einmal ab von der Neigung der Bahnebene, dann aber auch von der Stellung des Planeten in der Bahn durch die Relation $\beta = \arcsin(\sin u \,.\, \sin i)$, woraus sich herleiten läßt $\cos\beta\, d\beta = \sin i \cos u\, du$, da ja i von β unabhängig ist. Das wenden wir an auf das Integral

$$\int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{\alpha^2_3\left(1 - \frac{\alpha^2_2}{\alpha^2_3}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}\right)}},$$

wodurch es wegen der Relation $\alpha_2 = \alpha_3 \cos i$ nach Beseitigung des Faktors α_3 übergeht in

$$\int_0^\beta \frac{\cos\beta\, d\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2 i}} = \int_0^\beta \frac{\cos\beta\, d\beta}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2\beta}} = \int_0^u \frac{\sin i \cos u\, du}{\sqrt{\sin^2 i\,(1 - \sin^2 u)}},$$

oder schließlich in $\int_0^u du = u$. Da für $u = 0$ auch $\beta = 0$ wird, ist die Integrationskonstante Null.

Bisher haben wir also bekommen

$$\beta_3 = u - \alpha_3 \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{R}}.$$

Da aber im Perihel auch das zweite Glied verschwindet, so vereinfacht sich β_3 endlich in denjenigen Wert von u, welchen es im Perihel hat, und das letzte Resultat lautet daher in der gebräuchlichen Form

$$(15). \quad \underline{\beta_3 = \omega.^*)}$$

(14) und (15) fassen wir zusammen in den

Satz: „Die letzten beiden Konstanten β_2 und β_3 sind identisch mit 2 der gewöhnlichen Bahnelemente nämlich Ω und ω."

Wir haben jetzt die erforderlichen 6 „kanonischen Elemente" bestimmt, die an Stelle der a, e, i, . . . treten sollen. Man nennt sie auch die „natürlichen" Bahnelemente, die wir als Funktionen der alten Elemente dargestellt haben.

Die neuen Elemente lassen sich in die Gruppen der α und β trennen, welche wesentlich verschieden sind. Die α sind sämtlich für die Bahn durchaus charakteristische Konstanten, die mit den fundamentalsten Eigenschaften der Central-Bewegung zusammenhängen, während die β Winkelgrößen sind, also „Längen" oder „Anomalieen" im astronomischen Sinne darstellen. Bezüglich β_1 scheint das nicht ohne weiteres klar. Aber aus der Gleichung

$$M = \mu (t - T)$$

ist für $t = o$ der Zusammenhang zwischen T und der mittleren Anomalie M in der Form

$$T = -\frac{M}{\mu} = -M. \frac{a^{3/2}}{k}$$

ersichtlich und wir sind berechtigt, in T ebenfalls eine Längengröße zu sehen.

Bemerkenswert erscheint, daß die gefundenen Konstanten nicht *a priori* von einem bestimmten, speziellen Anziehungsgesetz abhängig waren.

Kanonische Elemente sind schon öfter abgeleitet worden, doch scheinen die hier gefundenen die einfachsten zu sein. Z. B. in den „Meddelanden från Lunds astronomiska observatorium, Nr. 10", wo von Norén und Wallberg folgende kanonischen Elemente nach Professor Charlier eingeführt sind:

$$A = \sqrt{a}, \qquad \lambda = l + \pi,$$

$$\xi = \sqrt{2\sqrt{a}\,(1 - \sqrt{1 - e^2})}\,\cos\pi, \qquad \eta = -\sqrt{2\sqrt{a}\,(1 - \sqrt{1 - e^2})}\,\sin\pi,$$

$$p = \sqrt{2\sqrt{p}\,(1 - \cos i)}\,\cos\Omega, \qquad q = \sqrt{2\sqrt{p}\,(1 - \cos i)}\,\sin\Omega,$$

die bis auf gewisse „Massenkonstanten" 6 kanonischen Differentialgleichungen genügen. —

Abgesehen von der prinzipiellen Wichtigkeit der erhaltenen Resultate ist es ein anderer Umstand, der sie beachtenswert erscheinen läßt. Daß die Methoden der speziellen Störungen dann, wenn e und i relativ klein oder groß sind, praktisch gewisse Schwierigkeiten haben, ist bekannt; besonders für große Werte von e sind letztere schwer zu umgehen, ja, bei nahe parabolischen Bahnen hält Oppolzer die Anwendung der Methode der Variation der Konstanten überhaupt nicht für zweckmäßig.

Gründen wir nun die Störungsrechnung auf die kanonischen Elemente, so wird sich zeigen, daß gerade für große Werte von e brauchbare Resultate sich ergeben.

---

*) $\omega = \pi - \Omega$, gleich der Winkeldifferenz zwischen Perihel und Knoten der Bahn.

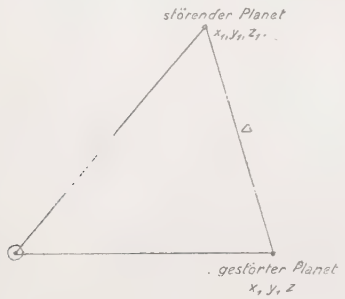
3.

Es wird sich jetzt darum handeln, unter Annahme eines dritten, störenden Körpers jene Einflüsse zu untersuchen, welche im Laufe der Zeit die kanonischen Elemente erfahren werden.

Die Gleichungen der ungestörten Bewegung waren

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Zu H tritt nunmehr noch eine Art Korrektion, die im Verhältnis zu H kleine Störung des Planeten, und es gilt dafür der Ausdruck



$$\Omega = k^2 m_1 \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^{\,3}} \right\},$$

die „Störungsfunktion", die eigentlich nur ein Teil der Kräftefunktion ist, so daß statt U auftritt

$$U + \Omega.$$

Daher geht $H = T - U$ über in $H = T - (U + \Omega)$ und die Bewegungsgleichungen gehen über in

$$(1). \quad q'_i = \frac{\partial (H - \Omega)}{\partial p_i} \qquad p'_i = \frac{-\partial (H - \Omega)}{\partial q_i}.$$

Auch jetzt wird der gestörte Körper in jedem Zeitmoment sich in elliptischer Bahn bewegen, jedoch zum Unterschied gegen früher wird diese Bahnellipse von Moment zu Moment eine andere sein. Bei Zugrundelegung der elliptischen Elemente folgten, wie man aus den einleitend angeführten Formeln sehen kann, die Differentialquotienten als ziemlich komplizierte Funktionen der störenden Kraft.

Ganz anders wird die Sache, wenn wir von den kanonischen Elementen ausgehen. Im einzelnen sollen die hierhergehörigen Entwicklungen nicht gegeben werden; doch es sei wenigstens auf einen von Jacobi entwickelten Hilfssatz hingewiesen, der für diese Entwicklungen wichtig ist und einige wesentliche Reziprozitäten erkennen läßt. Dieser Satz ist enthalten in den 4 Formeln

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial q_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p_i}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i},$$

ferner:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \beta_k}{\partial p_i}.$$

Das wichtige und interessante Ergebnis der angedeuteten Rechnungen sind die Störungsgleichungen

$$(2). \quad \begin{cases} \alpha'_k = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \beta_k}, \\ \beta'_k = -\dfrac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k}. \end{cases}$$

Hier werden die Differentialquotienten der ersten Gruppe der kanonischen Elemente unmittelbar durch den partiellen Differentialquotienten der Störungsfunktion je nach dem entsprechenden Element der andern Gruppe und umgekehrt gegeben. Die Koeffizienten der Differentialquotienten sind $\pm$ 1. Wir haben also den

Satz: „Differenziert man die Störungsfunktion partiell nach den kanonischen Elementen, so erhält man sofort je die Differentialquotienten der konjugierten Elemente nach der Zeit."

Die Gleichungen (2) haben genau dieselbe Bedeutung wie die Bewegungsgleichungen (1) des vorigen Paragraphen, nur daß an Stelle der p_i und q_i die im Störungsproblem als „unabhängige Variable" zu betrachtenden Konstanten des ursprünglichen Problems getreten sind.

An dieser Stelle sei es gestattet, in Kürze auf eine in historischer Beziehung wichtige Arbeit von Poisson einzugehen, welche im Journal de l'école polytechnique, 15. Heft, S. 266 ff. veröffentlicht ist. Der große Mathematiker gründet darin seine Ausführungen auf 6 in den Integralgleichungen auftretende Konstanten, die keine anderen sind als unsere kanonischen, allerdings mit einer Ausnahme. Es wurde mit Absicht im Folgenden die Bezeichnung nach Poisson beibehalten. Da ist zuerst die Konstante h in der Gleichung der lebendigen Kraft

$$(*) \quad \frac{dr^2 + r^2 dv^2}{dt^2} = 2R - h,$$

(R ist die Funktion von Lagrange; ferner T die halbe lebendige Kraft, V die Kräftefunktion und $R = T - V$), dann die Größe, welche die in einer gewissen Zeiteinheit vom Radiusvektor überstrichene Fläche darstellt, definiert durch die Gleichung

$$(**) \quad r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 2R \cdot r^2 - hr^2 - k^2.$$

Löst man diese Gleichung nach dt auf und integriert, so wird durch die Beziehung

$$t + l = \int \frac{r dr}{\sqrt{2Rr^2 - hr^2 - k^2}}$$

als dritte Konstante eingeführt und bedeutet die Zeit, welche dem Minimal- oder Maximalwert von r entspricht, also $r' = 0$ ist. Das ist aber im Perihel und Aphel der Fall.

Durch die aus $(*)$ und $(**)$ folgende Gleichung

$$v - g = \int \frac{k dr}{r\sqrt{2Rr^2 - hr^2 - k^2}}$$

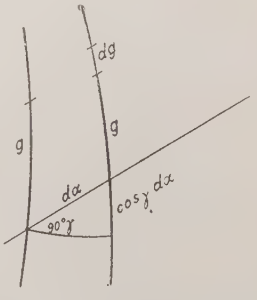
wird eine vierte Konstante g definiert als Länge des Perihels, gezählt von einem willkürlichen Punkte an, etwa vom Schnitt der Fundamental- und Bahnebene. Es fehlen noch die beiden die Lage der Bahnebene bestimmenden Konstanten, die Poisson α und γ nennt. Indem er von der aus den Flächensätzen abgeleiteten Gleichung der Bahnebene ausgeht, definiert er γ als Neigung der Bahnebene — das ist kein kanonisches Element — und α als den Winkel zwischen der Schnittlinie beider Ebenen und der x-Axe. Mit Hilfe dieser Konstanten gelang Poisson die Trennung der Variabeln in den Differentialgleichungen der Bewegung; er fand auch, daß für sie sich die rechte Seite der Störungsgleichungen auf ein einziges Glied reduziert. Er giebt die Gleichungen

$$k' = \frac{d\Omega}{d\omega}, \qquad \omega' = -\frac{d\Omega}{dk},$$

$$\alpha' = \frac{1}{k \sin\gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\gamma}, \qquad \gamma' = -\frac{1}{k \sin\gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\alpha},$$

$$l' = 2\frac{d\Omega}{dh}, \qquad h' = -2\frac{d\Omega}{dl}.$$

h entspricht unserem $2\alpha_1$, k dem α_3, l dem β_1, g dem ω und α dem Ω. Diese Zuordnung ist eine vollständige, bis auf γ und α_2. An Stelle von g ist in diesen Formeln jedoch ω getreten. Poisson that das, um die Verschiebung dg des Perihels nicht auf die doch gleichfalls bewegliche Knotenlinie zu beziehen, sondern auf eine während dt feste Linie, die an sich völlig beliebig ist. ω ist der Winkel zwischen dieser Linie und dem Perihel. $d\omega$ wird sich also von dg unterscheiden um die Größe der auf die Bahnebene projizierten Bewegung des Knotens, d. h.



$$d\omega = dg + \cos\gamma \, d\alpha,$$

unter Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung. Diese Idee hat später Tietjen augenscheinlich

selbständig von neuem entwickelt. Man vergleiche dazu „Mitteilungen der kgl. Universitäts-Sternwarte zu Breslau“, erster Band, 1901, Seite 79.

Die Poissonschen Formeln sind nicht rein kanonisch zu nennen, da rechts noch Faktoren auftreten, die eine Folge der Einführung von γ und der Definition von T als der halben lebendigen Kraft sind. Zwischen γ' (i' nach unserer Bezeichnung) und $\alpha'_2 = (k \cos\gamma)'$ bestehen nämlich die Relationen

$$\alpha'_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial i}\, i' = -k \sin i\, i',$$

und andererseits

$$i' = \frac{\partial\left(arc\cos\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)}{\partial \alpha_2}\cdot \alpha'_2 = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2}}}\cdot\frac{1}{\alpha_3}\cdot\alpha'_2 = -\frac{\alpha'_2}{\sqrt{\alpha_3^2-\alpha_2^2}} = -\frac{\alpha'_2}{k\sin i},$$

woraus man erkennt, daß in der That die Ersetzung von i (γ) durch α_2 jenen Faktor $\frac{1}{k\sin\gamma}$ zum Verschwinden bringt und die Gleichungen kanonisch macht. Der noch auftretende Zahlenfaktor 2, der freilich nicht eigentlich die kanonische Form stört, ließe sich auch sofort entfernen, wenn man h nicht gleich $\frac{k^2}{a}$ sondern nur halb so groß annimmt. Es hängt das mit der Definition der lebendigen Kraft zusammen. $h = 2h_1$ gesetzt, giebt ja

$$l' = 2\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial h'}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial h} = \frac{\partial\Omega}{\partial h_1} \text{ und } h' = 2\cdot h'_1 \text{ oder } h'_1 = \frac{\partial\Omega}{\partial l}.$$

4.

Nachdem wir im Vorhergehenden den überaus einfachen Ausdruck für die Variation der kanonischen Elemente kennen gelernt haben, soll nun versucht werden, jenes Ergebnis womöglich praktisch verwertbar zu gestalten.

Eine direkte Verwendung der Formeln (2) des vorigen Paragraphen hat nur theoretisches Interesse und dürfte zu keinerlei für die Praxis der speziellen Störungen verwendbaren Resultaten führen; indessen schien es nicht unmöglich, daß durch geeignete Anknüpfung an die bekannten und praktisch erprobten Methoden der Variation der gewöhnlichen Elemente sich neue, einfachere Gesichtspunkte ergeben würden.

Solchen Untersuchungen, zu denen mich Herr Professor Franz anregte, sind die folgenden Zeilen gewidmet.

Aber zuvor mögen zwecks bequemer Beziehung für später hier diejenigen Gleichungen zusammengestellt werden, welche den funktionalen Zusammenhang beider Elementgruppen miteinander angeben und ein leichtes Überführen der einen in die andern ermöglichen.

Zunächst haben wir

$$\alpha_1 = \frac{k^2}{2a}, \quad \beta_1 = T, \quad \alpha_2 = k\sqrt{p}\cos i, \quad \beta_2 = \Omega, \quad \alpha_3 = k\sqrt{p}, \quad \beta_3 = \omega.$$

So können wir aus den elliptischen Bahnelementen die kanonischen berechnen. Es bleibt noch die umgekehrte Aufgabe.

Zu ihrer Lösung haben wir:

$$a = \frac{k^2}{2\alpha_1} \qquad M = \frac{(2\alpha_1)^{3/2}}{k^2}(t-\beta_1),$$

$$e = \frac{1}{k^2}\sqrt{k^4 - 2\alpha_1\ \alpha_3^{\,2}}, \qquad \Omega = \beta_2,$$

$$i = acc\ (cos\ \frac{\alpha_2}{\alpha_3}) \text{ im Hauptintervall } 0-\pi, \qquad \omega = \beta_3,$$

$$\mu = \frac{(2\alpha_1)^{3/2}}{k^2}.$$

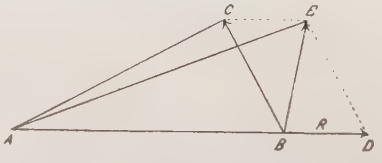
Es möge nun auf den Planeten eine störende Kraft wirken, welche wir uns gemäß den in der Einleitung gemachten Annahmen in 3 Komponenten zerlegt denken.

Wie man durch R, S, W die Differentialquotienten von a, e, i, . . . ausdrücken kann, lehren die im ersten Paragraphen angeführten Formeln. Es soll uns jetzt die Untersuchung beschäftigen, die Ausdrücke für die Differentialquotienten α_i' und β_i' der kanonischen Elemente abzuleiten.

Es ist zunächst $\alpha_1' = \frac{\partial\, a_1}{\partial a}\, a' = -\frac{k^2}{2a^2}\, a'$, also nach den erwähnten Formeln

$$\text{I.} \quad \alpha_1' = -k\sqrt{p}\left(R.\frac{e\sin v}{p} + S.\frac{1}{r}\right).$$

Interessanter gestaltet sich die Untersuchung der Wirkung von R, S, W auf α_3, eine Größe, welche in dem während eines Zeitelementes dt überstrichenen Elementardreieck $\frac{1}{2}\alpha_3$ eine sehr bequeme geometrische Darstellung erlaubt. Sei ABC ein solches Elementardreieck, welches der Körper allein unter dem Einfluß der in B vorhandenen Bahngeschwindigkeit und Centralkraft beschreiben würde, und es greife im Beginn von dt in B die Kraft R an. Sie bringt den Körper nach E, so daß nunmehr ABE des Elementarflächenstück wird. Aber ersichtlich ist $\triangle\ ABC = \triangle\ ABE$, also ist unsere Fläche ihrem Werte nach ungeändert geblieben, denn die rein formale Änderung des geometrischen Bildes bleibt für das Flächendifferential gleichgültig. Dieses Resultat wird durch die analytische Ableitung vollständig bestätigt. Jedoch darf man nicht glauben, daß R überhaupt ohne Einfluß bliebe; er tritt bloß an anderer Stelle zu Tage, indem er die Lage der Bahnkurve in ihrer Ebene ändert durch eine Verschiebung der Apsidenlinie. Eine solche geschieht je nach dem Punkte der Bahn, wo R wirkt, bald in positivem, bald in negativem Sinne, woraus wegen des stets gültigen Prinzips der stetigen Änderung folgt, daß mindestens einmal ein Punkt existiert, wo auch diese Wirkung von R nicht merkbar wird; dann ist allerdings R überhaupt nicht wahrzunehmen. Aus der Beziehung



$$\alpha_3 = k\sqrt{p}$$

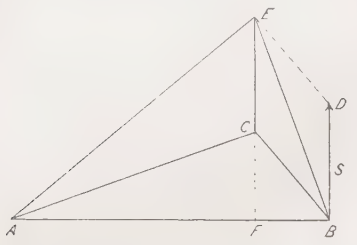
erhellt die schon von Newton auf rein geometrischem Wege abgeleitete Eigenschaft, daß das Flächenelement proportional der Quadratwurzel aus dem Parameter ist. (Newton, Principia I, Sectio 3, Prop. XIV, Theorema VI: latus rectum*) in duplicata ratione areae est . . .). Nehmen wir nun an, daß gerade, wenn der halbe Parameter Radiusvektor ist, R zu wirken beginne. Da die Fläche ungeändert bleibt, bleibt es auch der Parameter, der also auch Parameter der gestörten Bahn sein wird. Das ist aber nur möglich, wenn ihre große Axe mit der der ungestörten Bahn zusammenfällt, d. h. keine Verschiebung der Apsidenlinie stattfindet. Wir haben also einen Punkt, in dem die Wirkung von R verschwindet, gefunden

*) „latus rectum“ bedeutet den Parameter.

und sehen zugleich, daß es ihrer im ganzen 2 giebt, nämlich für $v = 90^0$ und 270^0. Der analytische Ausdruck für die Verschiebung des Perihels, soweit er von R abhängig ist, lautet

$$\pi' \ldots = -\frac{p \cos v}{k \sqrt{p}} \cdot R,$$

und bestätigt ohne weiteres unser Resultat.



Etwas anders gestaltet sich die Einwirkung von S. Beginnt in B die Kraft S zu wirken, so wird der Körper, den die alleinige Einwirkung von S nach D gebracht hätte, am Ende von dt in E und ABE das gestörte Elementardreieck sein. Es ist aber

$$ABE = ABC + AEC + ECB.$$

Verlängert man CE bis zum Schnitt F mit AB, so lässt sich die Summe der beiden kleineren Dreiecke darstellen durch

$$EC\,(AF + BF) = EC \,.\, AB$$

oder $S \,.\, r$, wenn wieder der Faktor $\frac{1}{2}$ der Kürze halber weggelassen wird, da wir ja auch statt α_3 nur $\frac{1}{2}\alpha_3$ geometrisch interpretieren. Es ergiebt sich also der einfache Satz, daß die Wirkung von S direkt proportional zum Radiusvektor erfolgt.

Die dritte Komponente W wird auf die Flächengeschwindigkeit überhaupt keinen Einfluß haben, denn ihre Projektionen auf die Bahnebene, welche ja die etwa vorhandene Einwirkung darstellen würden, sind Null. W wird vielmehr auf eine Verschiebung der Lage der Bahnebene, also auf eine Breitenänderung hinstreben, für welche eine geometrische Darstellung weniger zweckmäßig erscheint.

Vergleichen wir damit das analytische Ergebnis. Da α_3 nur von a und e abhängt, hat man

$$\alpha_3' = \frac{\partial \alpha_3}{\partial a}\, a' + \frac{\partial \alpha_3}{\partial e}\, e'$$

also $\alpha_3' = a\,(e \sin v\, R + \frac{p}{r} S) - \frac{ae}{p}\Big(p \sin v\, R + p\,(\cos v + \cos E)\, S\Big)$.

W tritt also nicht auf; ferner heben sich die R enthaltenden Glieder fort, ganz entsprechend dem Vorigen, und es bleibt nur

$$\alpha_3' = S \,.\, ap\left(\frac{1}{r} - \frac{e}{p}\,(\cos v + \cos E)\right).$$

Durch Anwendung der Formeln

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v\,, \qquad \frac{r}{a} = 1 - e \cos E$$

vereinfacht sich schließlich α_3' in

$$\text{II.} \qquad \underline{\alpha_3' = S \,.\, r}$$

Satz: „Auf die Bahngeschwindigkeit eines Planeten ist allein die Transversalkraft S von Einfluß, und zwar proportional dem jedesmaligen Radiusvektor.“

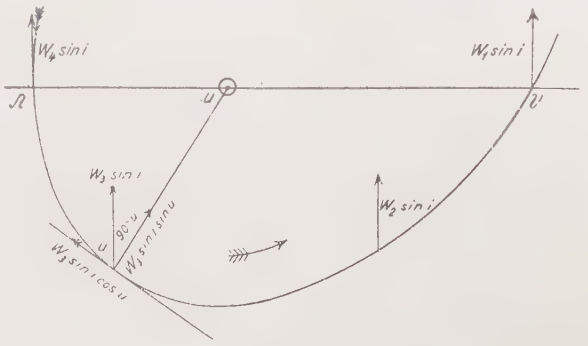
Auch $\alpha_2 = \alpha_3 \cos i$ läßt noch eine geometrische Herleitung seiner differentiellen Veränderung unter dem Einfluß der Kräfte R, S, W zu, obwohl sich hier die Betrachtung komplizierter gestaltet.

α_2 kann man sich als Projektion von α_3 auf eine gegen dessen Ebene stets unter dem Winkel i geneigte Ebene darstellen. Einige der vorhin erlangten Resultate werden wir auch hier benutzen können, so z. B. daß nur in der Ebene von α_2 selbst wirkende Kräfte von Einfluß sind.

Es ist hier erforderlich, zwischen R und S einerseits und W andererseits zu unterscheiden.

Die auf der Bahnebene senkrechte Kraft W bleibt während des ganzen Umlaufs des Planeten sich selbst parallel. Wir legen durch die Knotenlinie eine Ebene, welche gegen die Bahnebene um den

Winkel i geneigt ist. Die Projektion von W in dieser Ebene ist stets $W . \sin i$. Wir betrachten folgende Figur in der Projektionsebene:



Es ist klar, daß die Richtung der Projektion stets senkrecht zu Schnittlinie beider Ebenen sein wird, wie es in der Figur bei einigen Punkten angedeutet ist. (Übrigens ist darauf aufmerksam zu machen, daß die Figur nicht etwa die Projektion der Bahn auf die Ekliptik vorstellt.)

Für unsern Zweck kommen aber nur radiale oder transversale Kräfte in Betracht. Daher führen wir den Winkel ein, welchen der Radiusvektor in der Bahn mit der Knotenlinie bildet, d. i. das Argument der Breite u, für das die Gleichung gilt $u = v + \omega$. W bleibt sich selbst parallel, r dreht sich während eines Umlaufs um 360°, also wird in der gegenseitigen Lage von W oder dessen Projektion und r der Winkel u von Einfluß sein, der in der Figur bezeichnet ist. In jedem Punkte der Bahn denken wir uns W in die beiden verlangten Komponenten zerlegt, und erhalten

1) die radiale Komponente $= W \sin i \sin u$,

2) die transversale Komponente $= W \sin i . \cos u$,

von denen nur die letztere für uns in Betracht kommt, da die erste jetzt die gleiche Bedeutung hat, wie vorhin R.

Unter 2) steht nur der absolute Wert der Kraft, die hier an die Stelle von S tritt, ihrem Sinne nach muß sie stets das negative Zeichen erhalten, so daß wir zusammenfassend ihren Effekt schreiben können

$$- W r \sin i \cos u .$$

Anders verhält sich die Sache mit R und S. Während einer Revolution bleiben sie sich nicht parallel, sondern vollführen gleichfalls eine volle Umdrehung. Ihre relative Stellung gegen r wird also nicht mehr von der Lage von r beeinflußt werden, und daraus folgt, daß der Winkel u nicht mehr auftreten wird.

Wir denken uns für einen beliebigen Punkt der Bahn eine unter dem Winkel i geneigte Ebene so gelegt, daß die Schnittlinie beider Ebenen senkrecht zum zugehörigen Radiusvektor steht und durch dessen Ursprung hindurch geht. Dann wird die Projektion von r auf diese Ebene $r \cos i$.

S, welche zur Schnittlinie parallel ist, wird demzufolge in der Projektion unverändert auftreten, und nach dem vorhin hergeleiteten Satz wird die Wirkung von S auf α_2 proportional zu $r \cos i$ sein, also gleich $Sr \cos i$.

Die Komponente R bleibt auch in der Projektion stets radial und wir lassen sie daher einfach bei Seite.

Man muß sich vergegenwärtigen, daß man jetzt für jedes Flächenelement der Bahn eine Ebene in der eben erwähnten Art zu konstruieren hat. Das Kontinuum aller dieser Ebenen wird einen Rotationskegel umhüllen, dessen Axe senkrecht zur Bahnebene zu denken ist und die durch den Brennpunkt der Bahn, die Sonne, geht. Der Winkel an der Spitze ist $180^0 - 2i$. Auf den Mantel dieses Kegels haben wir uns die Bahn Punkt für Punkt projiziert zu denken, so daß die Kanten des Kegels den projizierten Radienvektoren entsprechen. Die Spitze des Kegels liegt im Anfangspunkt der Koordinaten. Daß dieser Kegel für die Betrachtung der Projektion von W nicht in Betracht kommen kann, folgt schon daraus,

daß zwischen r und den Projektionen der Kraftkomponenten in jedem Punkte der Bahn die relative Lage durchaus beibehalten wird, was in Wirklichkeit keineswegs der Fall ist.

Fassen wir Alles zusammen, so ergiebt sich das Resultat

$$\alpha_2' = Sr\cos i - Wr\sin i\cos u,$$

das noch auf analytischem Wege geprüft werden möge. Wir haben in diesem Fall auszugehen von der Gleichung $\alpha_2' = \frac{\partial\alpha_2}{\partial a}a' + \frac{\partial\alpha_2}{\partial e}e' + \frac{\partial\alpha_2}{\partial i}i'$, und bekommen daraus

$$\alpha_2' = a\cos i\left(e\sin v R + \frac{p}{r}S\right) - \frac{ae\cos i}{p}(p\sin v R + p(\cos v + \cos E)S) - r\sin i\cos u W.$$

Wiederum heben sich alle Glieder mit R heraus, und es bleibt

$\alpha_2' = Sap\cos i\left(\frac{1}{r} - \frac{e}{p}(\cos v + \cos E)\right) - Wr\sin i\cos u$, woraus ganz ähnlich wie vorhin folgt

$$\alpha_2' = S\,.\,r\cos i - Wr\sin i\cos u.$$

Das Resultat kann man aber auf eine andere Weise noch herleiten, indem man von der Gleichung $\alpha_2 = \alpha_3\cos i$ ausgeht. Dann ist $\alpha_2' = \alpha_3'\cos i - \alpha_3\sin i\,i'$, und es ergiebt sich ebenfalls mit Benutzung bereits abgeleiteter Formeln $\alpha_2' = Sr\cos i - k\sqrt{p}\sin i\,.\frac{r\cos u}{k\sqrt{p}}W$, oder

$$\text{III.}\quad \underline{\alpha_2' = Sr\cos i - Wr\sin i\cos u.}$$

Es scheint nicht unwichtig, an dieser Stelle näher auf die Kurve einzugehen, in welche durch die oben beschriebenen Operationen die Bahn übergeht.

Wir legen in der Bahnebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem fest, dessen Ursprung die Sonne und dessen x-Achse die große Axe der Bahn ist. Die Winkel zählen wir vom Perihel aus. Abweichend von der astronomisch üblichen Bezeichnung möge im folgenden die halbe kleine Axe der Bahn mit b bezeichnet werden, so daß die Polargleichung der Bahnellipse lautet

$$(1)\quad \varrho = \frac{b^2}{a + e\cos v}.$$ *)

Die Rotationsaxe unseres Kegels betrachten wir als z-Achse eines räumlichen Koordinatensystems. Jeder Winkel v bestimmt eine Halbebene durch z, in der ϱ und z wiederum ein rechtwinkliges Koordinatensystem bilden. Die Gleichung der Halbebene ist $\frac{y}{x} = tg\,v$. Für jeden Punkt der Bahnebene wird sein

$$(2)\quad \sqrt{x^2+y^2} = r,\ \cos v = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

wobei es für unsere Untersuchungen überflüssig ist, nähere Festsetzungen über das Zeichen der Wurzel zu treffen. Setzt man aus (2) für $\cos v$ seinen Wert ein, so geht (1) über in

$$(1^a)\quad \varrho = \frac{b^2}{a + e\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

In der Ebene (v) hat eine Gerade g, welche um den Winkel α gegen ϱ geneigt ist und durch dessen Endpunkt geht, die Gleichung

$$(3)\quad \frac{r}{\varrho} + \frac{z}{\varrho\,tg\,\alpha} = 1,$$

*) $\varrho = \frac{p}{1 + e\cos v}$ ist ihre astronomische Form. $p = \frac{b^2}{a}$ ist der Parameter. e bedeutet soviel, wie oben $\frac{e}{a}$, d. h. die numerische Exzentrizität, die man dort kurz mit e bezeichnet.

oder $(r - \varrho)\ tg\ \alpha + z = 0$. Sei nun $\alpha = 90^0 - i$. Für r und ϱ setzen wir aus (1) und (2) die Werte ein, und erhalten

$$\left\{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{b^2}{a + e\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}\right\} tg\ \alpha + z = 0.$$

Das ist die Gleichung der Fläche, welche von der Gesamtheit der Geraden g erfüllt wird. Nach einer Reihe von Umformungen nimmt sie die Gestalt an

$$[a\ (x^2 + y^2)\ tg\ \alpha + exz] + \sqrt{x^2 + y^2}\ [(ex - b^2)\ tg\ \alpha + az] = 0,$$

oder, wenn man quadriert

$$(4)\quad [a\ (x^2 + y^2)\ tg\ \alpha + exz]^2 - (x^2 + y^2)\ [(ex - b^2)\ tg\ \alpha + az]^2 = 0.$$

Die Fläche ist also eine windschiefe Regelfläche vierter Ordnung, windschief deshalb, weil keine zwei aufeinander folgenden Erzeugenden g sich schneiden, sondern windschief zu einander verlaufen, wie eine Überlegung der Verhältnisse zeigt.

Betrachten wir die Regelfläche von einer andern Seite her. Auf der z-Axe giebt es eine Strecke von der Länge $l_1 - l_2 = 2e\ tg\ \alpha$, deren jeder Punkt zwei verschiedenen Punkten der Ellipse zugeordnet ist, und zwar wird bei einem Umlauf um die Ellipse jene Strecke doppelt erfüllt von diesen Punkten. Wählt man einen Punkt P der Strecke, so findet man die beiden ihm entsprechenden, indem man aus P als Spitze einen Rotationskegel mit dem Öffnungswinkel $180 - 2\alpha$ konstruiert, dessen Rotationsaxe die z-Axe ist. Der Schnittkreis dieses Kegels mit der Ellipse habe die Gleichung $x^2 + y^2 = \varrho^2$; er schneidet die Ellipse in 4 Punkten, von denen bei dieser Spezialbetrachtung 2 reell sind.

Wir können jedoch die Frage ganz allgemein fassen, und die ganze Gerade z, nicht nur jene begrenzte Strecke betrachten. Dann besteht zwischen dieser Geraden und unserer Ellipse mit der Gleichung $\frac{(x-e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine Korrespondenz [4,2]. Einer Gruppe von Punkten auf der Ellipse

$$(1)\quad x' = \frac{-b^2 + a\varrho}{e}, \qquad y' = \frac{b}{e}\sqrt{2a\varrho - \varrho^2 - b^2} \text{ oder } -\frac{b}{e}\sqrt{2a\varrho - \varrho^2 - b^2}, \qquad z' = 0,$$

$$(2)\quad x' = \frac{-b^2 - a\varrho}{e}, \qquad y' = +\frac{b}{e}\sqrt{2a\varrho - \varrho^2 - b^2}, \qquad z' = 0,$$

entspricht auf der z-Axe die Gruppe

$$(3)\quad x'' = 0, \qquad y'' = 0, \qquad z'' = \varrho\ tg\ \alpha,$$
$$(4)\quad x'' = 0, \qquad y'' = 0, \qquad z'' = -\varrho\ tg\ \alpha.$$

Nehmen wir nun an, daß ϱ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufe, so bekommen wir dabei jede Punktgruppe auf der Ellipse und auf der z-Axe zweimal, nämlich für entgegengesetzt gleiche Werte von ϱ. Jetzt sehen wir aber: die Punkte (1) sind die Schnittpunkte der Ellipse mit der Geraden $x - \frac{-b^2 + a\varrho}{e} = 0$, $z = 0$, dagegen die Punkte (2) ihre Schnitte mit der Geraden $x - \frac{-b^2 - a\varrho}{e} = 0$, $z = 0$. Beide Gerade durchlaufen für alle Werte von ϱ denselben Parallelstrahlenbüschel. Folglich kann man unsere Korrespondenz in 2 Teile zerlegen, da den Punktpaaren (1) auf der Ellipse entweder der Punkt $z'' = +\varrho\ tg\ \alpha$ oder $z'' = -\varrho\ tg\ \alpha$ auf der Punktreihe z zugeordnet ist.

Wir erhalten so eine zu der vorhin konstruierten symmetrische Regelfläche. In der That war ja auch die Wahl der einen, etwa der oberen Halbgeraden von z völlig willkürlich. Also haben wir zwei Korrespondenzen [2,1] gefunden, die zwischen der Ellipse und der Geraden z bestehen.

Man kann somit unsere Fläche auch definieren als den Ort aller Geraden, welche die in einer Korrespondenz [2,1] einander entsprechenden Punkte eines Kegelschnittes und einer ihn nicht schneidenden Geraden verbinden.*)

Um die Gleichung der symmetrischen Regelfläche zu erhalten, haben wir nur z mit $-z$ zu vertauschen, also

$$(4^a) \quad [a(x^2+y^2)\,tg\,\alpha - exz]^2 - (x^2+y^2)\,[(ex-b^2)\,tg\,\alpha - az]^2 = 0.$$

Symmetrieebene ist die xy-Ebene.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zur Untersuchung der Projektionskurve selbst. Sie verläuft auf dem Rotationskegel, den wir der Bahn zuordneten, und dessen Gleichung ist, da $z \cdot tg\,\alpha = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$(5) \quad x^2 + y^2 = (z\,tg\,\alpha)^2.$$

Der Schnitt der Regelfläche 4. Ordnung und des Rotationskegels wird eine Raumkurve 8. Ordnung sein. Durch sie wird auch jede Fläche gehen, deren Gleichung man aus (4) und (5) komponiert. Wir setzen aus (5) den Wert von x^2+y^2 in (4) ein und erhalten

$$(az\,tg^3\alpha + exz)^2 - z^2\,tg^2\alpha\,[(ex-b^2)\,tg\,\alpha + az]^2 = 0,$$

wofür sich nach einigen Umrechnungen ergiebt

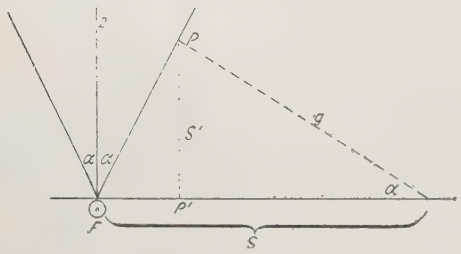
$$(6) \quad 0 = z^2\left\{(az\,tg\,\alpha + ex)\,(tg^2\alpha + 1) - b^2\,tg^2\alpha\right\}\left\{(az\,tg\,\alpha - ex)\,(tg^2\alpha - 1) + b^2\,tg^2\alpha\right\},$$

die sich in folgende 4 Gleichungen zerspalten läßt:

$$(6a) \quad \begin{cases} z = 0, & z = 0, \\ (az\,tg\,\alpha + ex)\,(tg^2\alpha + 1) - b^2\,tg^2\alpha = 0, \\ (az\,tg\,\alpha - ex)\,(tg^2\alpha - 1) + b^2\,tg^2\alpha = 0; \end{cases}$$

die dritte davon kann man auch in der Form $az\,tg\,\alpha + ex = b^2\,sin^2\alpha$ schreiben. Da auf diese Weise die Fläche in 4 Ebenen zerfällt, muß die Raumkurve 8. Ordnung in 4 ebene Kurven 2. Ordnung zerfallen. Zwei von ihnen liegen in der xy-Ebene und fallen zusammen in das imaginäre Geradenpaar $x^2+y^2 = (x+iy)\,(x-iy) = 0$. Die beiden andern werden Kegelschnitte sein, deren einer speziell die Projektion der Bahn ist.

Denken wir uns jeden Punkt der Projektionskurve orthogonal auf die Bahnebene projiziert, so werden alle Projektionsstrahlen einen geraden Cylinder bilden, dessen Gleichung gesucht werden soll.



Die Projektion des Radiusvektors ϱ ist gleich $FP = \varrho\,sin\,\alpha$, also der P projizierende Strahl gleich $FP\,sin\,\alpha$ oder

$$PP' = \varrho' = \varrho\,sin^2\alpha.$$

Mit Hilfe von (1a) folgt die Polargleichung der Kurve, welche die P' erfüllen:

$$(7) \quad \varrho\,sin^2\alpha = \frac{(b\,sin^2\alpha)^2}{(a\,sin^2\alpha) + (e\,sin^2\alpha)\,cos\,v};$$

die Kurve ist also eine der Bahn ähnliche Ellipse mit den Halbaxen $a\,sin^2\alpha$ und $b\,sin^2\alpha$, und daher der projizierende Cylinder ein elliptischer Cylinder, dessen auf den Mittelpunkt bezogene Gleichung lautet

$$\left(\frac{x + e\,sin^2\alpha}{a\,sin^2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\,sin^2\alpha}\right)^2 = 1,$$

*) Über diese windschiefe Regelfläche vierter Ordnung vergl. E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, Band II, S. 340, Nro. VIII.

oder auch

$$(8)\quad b^2 (x + e \sin^2\alpha)^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \sin^2\alpha = 0.$$

In identisch dieselbe Form geht aber auch die 3. der Gleichungen (6a) über, wenn man auf beiden Seiten derselben $e^2 b^2 \sin^4\alpha$ hinzufügt, und beachtet, daß $a^2 - b^2 = e^2$ ist. Wir können also unsere Projektionskurve als Schnitt des Kegels und des elliptischen Cylinders betrachten, weshalb sie im allgemeinen eine Raumkurve 4. Ordnung sein wird. Setzt man aus (5) $y^2 = z^2 tg^2\alpha - x^2$ in (8) ein, so geht durch diese Raumkurve 4. Ordnung die Fläche

$$b^2 (x + e \sin\alpha)^2 + a^2 (z^2 tg^2\alpha - x^2) - a^2 b^2 \sin^4\alpha = 0,$$

die aber in die beiden Ebenen

$$(az\, tg\alpha + ex - b^2 \sin^2\alpha) = 0 \text{ und } (az\, tg\alpha - ex + b^2 \sin^2\alpha) = 0$$

zerfällt. Die Rnumkurve 4. Ordnung muß also in 2 Ellipsen zerfallen, deren eine eben jene oben erhaltene ist. Die zweite liegt zu ihr symmetrisch und ergiebt sich bei Betrachtung der symmetrischen Regelfläche.

Das Ergebnis der ganzen Untersuchung ist folgender

Satz: „Die mittels des beschriebenen Verfahren sich ergebende Projektionskurve der Bahnellipse ist gleichfalls eine ebene Kurve, und zwar, wie die Bahn selbst, eine Ellipse."

Sobald dagegen durch die Störungen die Bahn in eine Raumkurve deformiert wird, geht auch die Projektionskurve in eine solche über.

Durch die Projektion der Bahn gehen also 2 Flächen, die längs der Kurve aufeinander senkrecht stehen. Zur graphischen Darstellung der Störungen der Bahn nach gewissen Gesetzen erscheinen dieselben nicht ungeeignet, und man könnte dann die Projektionskurve Indicatrix der Bahn nennen.

In einem Spezialfall ist der Inhalt des abgeleiteten Satzes sofort klar, wenn es sich nämlich um eine Kreisbahn handelt, in welchem Fall sich die Verhältnisse bedeutend vereinfachen.

Wir kommen nunmehr zur Ableitung des Differentialquotienten von β_1. Wir hatten $\beta_1 = -\frac{M}{\mu}$ gefunden. Da in μ a enthalten ist, hängt die Änderung von β_1 von M und a ab. Nun ist aber

$$M' = -\sqrt{1-e^2}\,(\omega' + \cos i\, \Omega') - \frac{2\, r\, \sqrt{1-e^2}}{k\sqrt{p}}\, R + \int \frac{d\mu}{dt}\, dt.$$

Da t von T in keiner Weise abhängt, fällt für uns das zuletzt stehende Integral fort, und wir können setzen

$$\beta'_1 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{\mu}\right) = -\frac{d}{dt}\left(M \cdot \frac{a^{3/2}}{k}\right),$$

ein Ausdruck, der weiterhin die Gestalt annimmt

$$\beta_1' = \frac{a^{3/2}}{k}\left\{\sqrt{1-e^2}\,(\omega' + \cos i\, \Omega') + \frac{2\, r\, \sqrt{1-e^2}}{k\sqrt{p}}\, R\right\} - \tfrac{3}{2}\,\frac{M}{k}\,\sqrt{a}\,\left\{\frac{2a^2}{k\sqrt{p}}\,(e \sin v\, R + \frac{p}{r}\, S)\right\},$$

und schließlich übergeht in

$$\text{IV.}\quad \beta'_1 = R \cdot \left[\frac{a}{k^2 e}\,(2er - p\cos v) - 3\, ae \sin v \cdot \frac{1}{k\sqrt{p}} \cdot \frac{M}{\mu}\right] + S \cdot \left[\frac{a\,(p+r)\sin v}{ek^2} - \frac{3\, ap}{k\sqrt{p}\, r} \cdot \frac{M}{\mu}\right].$$

Die orthogonale Komponente tritt also nicht auf. Dieselbe Schlußformel erhält man auch, wenn man die Gleichung $\beta'_1 = \frac{\mu'}{\mu}(t - \beta_1) - \frac{M'}{\mu}$ weiterentwickelt.

Da β_2 und β_3 mit 2 gewöhnlichen Elementen übereinstimmen, können wir für ihre Differentialquotienten die bereits für Ω' und ω' bekannten Werte benutzen.

Zur besseren Übersicht stellen wir die gewonnenen Resultate zusammen:

$$\alpha'_1 = -\alpha_3 \left(R \frac{e \sin v}{p} + S \cdot \frac{1}{r} \right),$$

$$\alpha'_2 = S\, r \cos i - W\, r \sin i \cos u,$$

$$\alpha'_3 = S\, r,$$

$$\beta'_1 = R \cdot \left[\frac{a}{ek^2} (2er - p \cos v) - 3\, ae \sin v \cdot \frac{1}{\alpha_3} \cdot \frac{M}{\mu} \right] + S \cdot \left[\frac{a\,(p + r) \sin v}{ek^2} - \frac{3\, ap}{\alpha_3 r} \cdot \frac{M}{\mu} \right],$$

$$\beta'_2 = \frac{1}{\alpha_3} \cdot \frac{r \sin u}{\sin i} W,$$

$$\beta'_3 = -R \cdot \frac{p \cos v}{e\alpha_3} + \frac{S\,(p + r) \sin v}{e\alpha_3} - \frac{W\, r \cos i \sin u}{\alpha_3 \sin i}.$$

Beachtenswert scheinen die Formeln für die α', die für die β' sind bekannt. $\cos i$ tritt nirgends im Nenner auf, also sind die Formeln für Bahnen mit größerer Neigung ohne weiteres anwendbar. Die Änderung von α_1 ist direkt proportional zu α_3, dagegen die von β_2 und β_3 umgekehrt proportional dazu. Die Formel $\alpha'_3 = S \cdot r$ kann vielleicht zur Bestimmung der Korrektion der Masse des störenden Körpers dienen. Es folgt nämlich aus der Rechnung für einen Zeitpunkt t die Flächengeschwindigkeit $k \sqrt{p}$ des gestörten Körpers, und die Störung $\delta k \sqrt{p} = S \cdot m_1 \cdot r$ für den gleichen Zeitpunkt. Aus Beobachtung und Rechnung möge sich später als wirkliche Geschwindigkeit $k \sqrt{p_1}$ ergeben. Wenn nun $k\sqrt{p_1} - k\sqrt{p} \neq \delta k \sqrt{p}$ ist, so suchen wir die Ursache der Abweichung in der Ungenauigkeit von m_1, und es sei etwa Δm_1 die Korrektion für m_1. Es wird also sein

$$k (\sqrt{p_1} - \sqrt{p}) = S \cdot r \left(\frac{m_1 + \Delta m_1}{m_1} \right), \quad \text{oder } k (\sqrt{p_1} - \sqrt{p}) = S \cdot r \,(1 + dlm_1).$$

dlm_1 ist das logarithmische Dekrement von m_1. Jede Beobachtung wird zu so einer Gleichung führen, und man wird dlm_1 finden können.

Teil II.

1.

Es ist schon darauf hingewiesen worden, daß die entwickelten Formeln besonders bei elliptischen Bahnen von großer Exzentrizität und Neigung vorteilhaft erscheinen. Nur der ohnedies wohl kaum wahrscheinliche Fall, daß die Neigung 90° oder in der Nähe davon ist, erscheint ausgeschlossen, weil α_2 in diesem Fall unter alle Grenzen abnimmt.

Vornehmlich in den langgestreckten, vielfach stark gegen die Ekliptik geneigten Bahnen einiger kurzperiodischer Kometen sind solche Bedingungen verwirklicht. Aus der Reihe derselben soll daher auch ein Beispiel für die Methode durchgeführt werden, und zwar wurde dazu der Komet Holmes (1892, III) gewählt.

Gerade auf Grund des Erwähnten könnte man hier einwenden, daß es bei weitem prägnantere Beispiele giebt. Gehört doch nach den Eigenschaften seiner Bahn Komet Holmes mit größerem Recht unter die Asteroiden; er hat mit 0.41 weitaus die kleinste Exzentrizität unter allen periodischen Kometen. Aber jener merkwürdige Komet wurde absichtlich gewählt, um die Anwendbarkeit der Methode auf einen Fall, der den für gewöhnlich vorkommenden möglichst nahe liegt, zu prüfen.

Unter den bis Ende 1900 bekannten und numerierten 463 kleinen Planeten*) hat (183) Istria mit $\varphi = 20^0\ 25'\ 53''.5$ die größte Exzentrizität. Nur um $3^0\ 44'\ 0''.6$ wird sie von dem am 6. November 1892 zuerst von Holmes in London gesehenen Kometen übertroffen, dessen Bahn im übrigen durchaus die eines kleinen Planeten ist.

Die etwa 21° betragende Neigung seiner Bahn kommt bei kleinen Planeten oft genug vor, ja es giebt sogar (mit Einschluß zweier nicht numerierter Planeten DX und EA) 25 Asteroiden mit größerer Neigung; sie schwankt bei ihnen zwischen $20^0\ 59'\ 20''.2$ [(154), Bertha] und $34^0\ 37'\ 30''.8$ [(2) Pallas]. Es kommt unter ihnen sogar eine um $13^0.8$ stärkere Neigung vor, als sie Komet Holmes hat.

Nach den Werten von a (μ) und e würde der Komet in die aus 18 Gliedern bestehende Jupitersgruppe der Asteroiden gehören. Dort zeigt sich merkwürdigerweise für μ zwischen 540″ bis 461″ eine Lücke, in die allein EA mit 509″ eintritt; dahinein würde auch der Komet Holmes ($\mu = 514''$) gehören.

Diese Thatsachen, nicht weniger auch der Anblick des Kometen haben seinerzeit Anlaß zu mehreren, teilweis sehr geistreich durchgeführten und verfochtenen Theorieen über den Ursprung jenes sonderbaren Gliedes in der Kometen-Familie des Jupiter gegeben. Alles Historische über den Kometen haben die beiden Bearbeiter seiner Bahn bereits ausführlich dargestellt, so daß ich hier darüber hinweggehen kann.

---

*) Vergl. Veröffentlichungen des kgl. astronomischen Recheninstituts zu Berlin. Nr. 16, 1901.

2.

Aus den von 1892 Nov. 6 bis 1893 März 13 reichenden Beobachtungen der ersten Erscheinung des Kometen Holmes haben die Herren Kohlschütter und Zwiers*) definitive Bahnen mit folgenden Schlußelementen abgeleitet:

Mittleres Äquinoktium 1890.0

Element	Kohlschütter	Zwiers	Differenz K.—Z.
M	$25^0\ 48'\ 7''.92$	$25^0\ 48'\ 10''.10$	$-2''.18$
ω	$14\ 16\ 50.65$	$14\ 15\ 34.67$	$+1'\ 15''.98$
π	$345\ 56\ 4.07$	$345\ 55\ 7.24$	$+56''.83$
Ω	$331\ 39\ 13.42$	$331\ 39\ 32.57$	$-19''.15$
i	$20\ 47\ 12.23$	$20\ 47\ 12.70$	$-0''.47$
φ	$24\ 9\ 54.10$	$24\ 10\ 20.15$	$-26''.05$
e	0.4093662	0.4095272	−0.0001610
μ	514″.26846	514″.20872	+0.05974
lga	0.5592111	0.5593045	−0.0000934
T	1892 Juni 13.37855 d	1892 Juni 13.39579 d	−0.01724 d
Umlauf	2520.084	2520.898	−0.814

Epoche und Oskulation 1892, Dezember 11.0 M. Z. Berlin.

Die Arbeit von Zwiers wurde mir erst in letzter Zeit zugänglich. Den nachfolgenden Störungsrechnungen habe ich die Elemente von Dr. Kohlschütter zu Grunde gelegt.

Es ergeben sich aus ihnen folgende

Kanonische Elemente des Kometen 1892 III.

α_1	$0.408246 \cdot 10^{-4}$	β_1	1892, 4515553
α_2	$0.279336 \cdot 10^{-1}$	β_2	$331^0\ 39'\ 13''.42$
α_3	$0.298784 \cdot 10^{-1}$	β_3	$4^0\ 16'\ 50''.65$

Epoche, Oskulation und mittl. Äqu. wie oben.

Mit diesen Elementen habe ich als Beispiel für die Anwendung der im ersten Teil entwickelten Formeln für 2600 Tage die Jupiterstörungen berechnet, und gebe nachstehend die Resultate dieser Arbeit.

Man muß vor allen Dingen versuchen, sich aus den kanonischen Elementen ebenso ein Bild von der Bahn des Kometen zu machen, wie man es auf einen Blick aus den elliptischen Elementen gewinnt.

Um über die Lage der Bahnebene zu urteilen, vergleicht man α_2 und α_3; $\beta_2 \equiv \Omega$ kann man ohne weiteres entnehmen. Aus α_1 schließt man auf die große Axe der Bahn. Unter Umständen kann es bei diesem Element für die Rechnung zweckmäßig erscheinen, der Homogeneïtät wegen als Hilfsgröße zu substituieren $\bar{\alpha}_1 = 10^{\lambda} \cdot \alpha_1$, wo λ so zu wählen ist, daß $\bar{\alpha}_1$ von der gleichen Größenordnung wie α_2 und α_3 wird, welche ihrerseits meist von gleicher Ordnung sein werden, außer wenn i in unmittelbarer Nähe von 90^0 liegt. Bei Ableitung der Resultate muß dann jener Faktor entsprechend berücksichtigt werden.

*) 1. Dr. E. Kohlschütter, Bestimmung der Bahn des Kometen 1892 III (Holmes). Inaugural-Dissertation, Kiel 1896. — 2. H. J. Zwiers, recherches sur l'orbite de la comète périodique de Holmes etc. in: Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, eerste Sectie, Deel III, Nro. 5 1895.

So hatte ich in meiner Rechnung zunächst $\bar{\alpha}_1 = 10^8 . \alpha_1$ eingeführt, eine Substitution, die hier aber noch nicht unbedingt erforderlich gewesen wäre, da schon für 6stellige Rechnung eine völlig genügende Schärfe jedesmal erreichbar war.

Ist α_2 negativ, so kennzeichnet das eine Neigung $> 90^0$, also nach älterer Bezeichnung einen „rückläufigen" Kometen.

Zum einfachen Vergleich seien hier noch neben den elliptischen Elementen von einigen andern periodischen Kometen die kanonischen Elemente angeführt. Aus Dr. J. G. Galle, Verzeichnis der Elemente der bisher berechneten Kometenbahnen etc., Leipzig 1894, wählte ich aus folgende 6 Kometen:

Nr.	T. (M. Z. Paris)	ω	Ω	i	e	log a
394	1891 Sept. 17.49316	172° 58′ 2″	146° 16′ 32″	15° 42′ 41″	0.627125	0.5503386
235	1852 Sept. 23.95210	223 4 48	245 53 29	12 33 50	0.756119	0.5476188
399	1891 Okt. 17.98599	183 57 20	334 41 27	12 54 58	0.846474	0.3458993
190	1835 Nov. 15.94539	110 38 27	55 9 59	162 14 55	0.967391	1.2549806
357	1844 Jan. 25.72388	199 11 33	254 5 42	74 2 36	0.954996	1.2364588
398	1891 Sept. 3.43865	172 48 26	206 22 17	25 14 34	0.557186	0.5559365
Holmes	—	14 16 51	331 39 13	20 47 12	0.409366	0.5592111

Folgende Tabelle giebt die Namen der Kometen und ihre kanonischen Elemente, mit Ausnahme von β_2 und β_3, die man ja sofort aus der ersten Zusammenstellung entlehnen kann.

Namen	β_2 (M. Z. Berlin)	α_1	α_2	α_3	Mittl. Äqu.
d'Arrest 1890 V	1890 Sept. 17.53032	$0.415713.10^{-4}$	$0.243056.10^{-1}$	$0.252489.10^{-1}$	1890.0
Biela 1852 III	1852 Sept. 23.98926	$0.419290.10^{-4}$	$0.206410.10^{-1}$	$0.211474.10^{-1}$	1852.0
Encke 1891 III	1891 Okt. 18.02315	$0.667166.10^{-4}$	$0.420402.10^{-1}$	$0.431314.10^{-1}$	1891.0
Halley 1835 III	1835 Nov. 15.98255	$0.653360.10^{-5}$	$0.164248.10^{-2}$	$0.172459.10^{-1}$	z. Z. d. Perihels
Pons-Brooks 1884 I	1884 Jan. 25.76104	$0.681827.10^{-5}$	negativ $0.582372.10^{-2}$	$0.211841.10^{-2}$	1880.0
Wolff 1891 II	1891 Sept. 3.47581	$0.411336.10^{-4}$	$0.245043.10^{-1}$	$0.270913.10^{-1}$	1891.0
Holmes	1892 Juni 13.37855	$0.408246.10^{-4}$	$0.279336.10^{-1}$	$0.298784.10^{-1}$	1890.0

Den Kometen Holmes habe ich dieser Zusammenstellung zum Vergleich beigefügt.

Es ist für die Rechnung nötig, anstelle des mittleren Sonnentages ein anderes Zeitintervall als Einheit einzuführen, meist $\omega = 40$ mittlere Tage. Dann müssen natürlich auch die grundlegenden Konstanten entsprechend geändert werden, vor allem die Gaußsche Konstante k^2. Etwa mit Hilfe der physikalisch gebräuchlichen Formeln für die Dimensionalität einer Kraft läßt sich einfach zeigen, daß für k^2 einzusetzen ist $(\omega k)^2$, da die Kraft bezüglich der Zeit von der $(-2)^{\text{ten}}$ Dimension ist; statt k tritt überall (ωk) auf.

Bei dieser Umänderung hat man auch das seit β_1 verflossene Zeitintervall $t - \beta_1$ gehörig zu berücksichtigen.

Die am Schluß von Teil I abgeleiteten Formeln nehmen dann folgende für die Rechnung zu verwendende Gestalt an:

$$(1)\quad \begin{cases} \delta\alpha_1 = -\alpha_3 \left(R\frac{e\sin v}{p} + S\cdot\frac{1}{r}\right), \\ \delta\alpha_2 = \quad S\, r\cos i - W\, r\sin i\cos u, \\ \delta\alpha_3 = \quad S\, r, \\ \beta'_1 = \quad R\left\{\frac{1}{2e\alpha_1}(2er - p\cos v) - \frac{3ae\sin v}{\alpha_3}(t-\beta_1)\right\} \\ \qquad + S\left\{\frac{1}{2e\alpha_1}(p+r)\sin v - \frac{3ap}{\alpha_3}\cdot\frac{t-\beta_1}{r}\right\}, \\ \delta\beta_2 = \frac{1}{\alpha_3}\cdot\frac{r\sin u}{\sin i}\, W, \\ \delta\beta_3 = \frac{1}{\alpha_3}\left\{-R\cdot\frac{p}{e}\cos v + S\frac{(p+r)\sin v}{e} - W\frac{r\sin u\cos i}{\sin i}\right\}. \end{cases}$$

Die 3 störenden Kräfte findet man aus den Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} R = k^2 m_1 \omega \left(\Delta x_1 - \frac{r}{\varrho_3}\right), \\ S = k^2 m_1\, \omega\, \Delta y_1, \qquad\qquad \Delta = \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1{}^3}. \\ W = k^2 m_1\, \omega\, \Delta z_1. \end{cases}$$

In (1) steht $\delta\alpha_1$ u. s. w. an Stelle von $40\alpha'_1$ u. s. w., nur bei β'_1 ist der Übersichtlichkeit wegen die ursprüngliche Zeiteinheit beibehalten. In den Formeln (1) und (2) ist sonst überall gleich das in der Rechnung gebrauchte Einheitsintervall eingeführt.

Um einen ganz klaren Einblick in den Gang der Rechnung zu geben, schien es mir angebracht, einmal Schritt für Schritt sie auch geometrisch zu untersuchen, wozu gerade diese Methode geeignet ist. Die erste der beifolgenden Tafeln giebt die Bahnen des Kometen und Jupiters und für den ganzen Verlauf der Rechnung die gegenseitige Lage der beiden Himmelskörper. Die voll ausgezogene Hälfte der beiden Bahnen ist über, die punktiert gezeichnete unter der Ebene der Zeichnung verlaufend zu denken, welche die Ekliptik darstellt. In der zweiten Tafel finden sich die störenden Kräfte bis auf etwa 0.001″ genau eingezeichnet. Betrachtet man beide Tafeln in ihrem Zusammenhang, so kann man klar und deutlich die jeweilige Einwirkung der Störungen auf die einzelnen Elemente verfolgen, was bei der Rechnung allein bei weitem weniger hervortritt. — In der Bahn des Kometen finden sich an einer Stelle die Elemente α_3 und α_2 dargestellt. Die etwa $\frac{1}{10}$ betragende Verkleinerung, welche die Projektion α_2 von α_3 (die nur der Übersicht wegen neben α_3 gezeichnet wurde) aufweist, giebt ein Maß dafür, wie hoch man sich die Bahn des Kometen über die Zeichnungsebene emporgeklappt zu denken hat.

Aus dem Verlauf der störenden Kräfte kann man ferner leicht eine Reihe von Sätzen ablesen, wie sie sich in einzelnen Schriften gelegentlich vorfinden.*) So wird an einer Stelle zwischen 1899 August 2 und September 11 die Entfernung beider Planeten ϱ gleich dem Abstand r_1 Jupiter-Sonne. Infolge dessen werden S und W Null. Oder weiter: Kurz nach 1892 September 2 befanden sich Jupiter und der Komet in Konjunktion, es wird in diesem Augenblick keine Transversalkraft geben, in der That sieht man, daß S Null wird. Während der weitaus größern Zeit waren die 3 störenden Kräfte negativ. $\mathfrak{A}$ wirkte daher

*) Vergl. z. B. G. B. Airy, Populäre physische Astronomie, deutsch von Litrow, Stuttgart 1839.

ähnlich, als ob der Komet durch ein widerstehendes Mittel hindurch ginge, er beschleunigte ihn. W strebte den Kometen während der ersten Hälfte seines Umlaufs der Ekliptik zu nähern, die Knotenlinie geht also rückwärts, wie stets bei negativem W. Die Änderung der Neigung hängt von der Stellung des Kometen in der Bahn ab.

Ich habe mit der Oskulationsepoche 1892 Dez. 11, M. Z. Berlin die Störungen zunächst für einen Umlauf vorausberechnet, mit dazwischenliegender Ableitung neuer Elemente für 1896, Juli 23,0. Ferner verfolgte ich die Rechnung rückwärts bis zum vorangegangenen Periheldurchgang, also bis in eine Zeit hinein, zu der der Komet noch gar nicht entdeckt, ja vielleicht noch nicht vorhanden war.

Die Ableitung neuer Elemente geschah, um meine Resultate denjenigen von Zwiers vergleichsweise gegenüberstellen zu können. Ehe ich das Rechnungsschema und die Ergebnisse der Rechnung mitteile, möchte ich auf einen Vorteil aufmerksam machen, den die Methode hat. Eine doppelte Integration, wie sie bei der Variation der Elemente μ' verlangt, kommt hier nicht vor.

Was die Rechnung selbst anlangt, so sind sämtliche Hilfsgrößen und Konstanten siebenstellig, das Ubrige fünf-, zur Sicherheit aber größere Partieen sechsstellig gerechnet worden. Alle irgend in Betracht kommenden Prüfungen durch Differenzenbildung und teilweis doppelte Rechnung sind natürlich ausgeführt worden.

Variation der kanonischen Elemente.

In den Formeln (1) und (2) treten noch eine Anzahl Größen auf, die für den Verlauf der Rechnung konstant bleiben, und daher zweckmäßig vorher berechnet werden. Sie sind unter „Konstanten“ und „Hilfsgrößen“, letztere mit einer abkürzenden Bezeichnung durch Zahlen, zusammengestellt.

Konstanten.			1892, Dez. 11,0.
$log\ \bar{\alpha}_1$	8.6109218	β_1	1892, 451555
$log\ \alpha_2$	8.4461268	β_2	$334^0\ 39'\ 13''.4$
$log\ \alpha_3$	8.4753580	β_3	$14\ \ 16'\ \ 50.6$
		$t - \beta_1$	$180^d.621.$
$sin\ \varphi$	9.6121120		
ω'	3.5362739		
$lg\ e$	3.1483859		
$Num\ e$	0.4093662		
$1 + e$	0.1490236		
$1 - e$	9.7713183		
$\sqrt{1+e}$	0.0745118		
$\sqrt{a}$	0.2796056		
$\sqrt{1-e}$	9.8856592		
$\sqrt{q'}$	0.3541174		
$\sqrt{q}$	0.1652648		
$40\ \mu$	$20570''.7384 = 5^0\ 42'.\ 50''.74$		
p	0.4795532		
$\sqrt{p}$	0.2397766		
$Num\ p$	3.016847		

Hilfsgrößen.	
$\alpha_3 = (1)$	8.4753580
$\frac{1}{\alpha_3} = (2)$	1.5246420
$\frac{1}{2\alpha_1} = (3)$	4.0880482
$\frac{e}{p} = (4)$	9.1325588
$cos\ i = (5)$	9.9707688
$sin\ i = (6)$	9.5500941
$cotg\ i = (7)$	0.4206747
$\frac{1}{sin\ i} = (8)$	0.4499059
$2e = (9)$	9.9131420
$\frac{1}{e} = (10)$	0.3878880
$\frac{3ae}{\alpha_3} = (12)$	2.1730864
$\frac{3ap}{\alpha_3} = (13)$	3.0405276

Zur Rechnung verwendet werden die Formeln:

$$\delta\alpha_1 = -(1)\left\{(4)\,sin\,v\,R + S\cdot\frac{1}{r}\right\},$$

$$\delta\alpha_2 = (5)\,Sr - (6)\,Wr\,cos\,u,$$

$$\delta\alpha_3 = Sr,$$

$$\beta'_1 = R\,\{(3)(9)(10)r - (3)(10)p\,cos\,v - (12)\,sin\,v\,(t-\beta_1)\}$$
$$+ S\left\{(3)(10)\,(p+r)\,sin\,v - (13)\frac{t-\beta_1}{r}\right\},$$

$$\delta\beta_2 = (2)(8)\,Wr\,sin\,u,$$

$$\delta\beta_3 = -R\,\frac{(2)}{(4)}\,cos\,v + S\cdot(2)(10)\,(p+r)\,sin\,v - W(2)(7)\,r\,sin\,u.$$

Schema der Rechnung.

1.

Datum	1897 April 9
$t-\beta_1$	17 71.269
$log(t-\beta_1)$	3.248285
M	253° 55′.5
E	234 44.9
$\frac{1}{2}E$	117 22.4
$sin\,\frac{1}{2}E$	9.94843
$cos\,\frac{1}{2}E$	9.66256n
$\sqrt{r}\,sin\,\frac{1}{2}v$	0.30212
$\sqrt{r}\,cos\,\frac{1}{2}v$	9.82713n
$tg\,\frac{1}{2}v$	0.47499n
$\frac{1}{2}v$	108° 31′.2
$cs\,\frac{1}{2}v$	9.97690
$\sqrt{r}$	0.32522
v	217° 2′.4
u	231 3.0

2.

$sin\,u$	9.89081n
r	0.65044
$cos\,u$	9.79840n
$sin\,v$	9.77987n
$cos\,v$	9.90212
$-R\,(1)(4)\,sin\,v$	0.98903n
$-S\cdot(1)\cdot\frac{1}{r}$	1.49189
$Summe = \alpha'_1$	+0.02129
Sr	4.31803n
α'_3	— 2.0798
$(5)\,Sr$	4.28874
$(6)\,Wr\,cos\,u$	2.60879n
Diff. $= \alpha'_2$	— 1.9036
$(3)(9)(10)r$	5.03850
$(3)(10)p\,cos\,v$	4.85483n
$(12)\,sin\,v\,(t-\beta_1)$	5.20137n

3.

Differenz	339836.3
$R\,log$ Diff.	9.131360n
dazu Num I	— 13.532
Num II	26.400
Summe $= \beta'_1$	12.868
$p+r$	0.87388
$(3)(10)\,(p+r)\,sin\,v$	5.12814n
$(13)(t-\beta_1) : r$	5.63674
S·Differenz $\equiv$ II	9.42161
$(2)(8)\,Wr\,sin\,u$	0.43984n
β'_2	—2.″7532
$-(2)(10)\,Rp\,cos\,v$	1.20756n
$+(2)(10)\,S(p+r)\,sin\,v$	1.54838
$-(2)(7)\,Wr\,sin\,u$	0.42055
Summe $= \beta'_3$	21″.856

Die Rechnung ergiebt die Störungen für α_1 in Einheiten der siebenten Dezimale, für α_2 und α_3 in Einheiten der sechsten Dezimale. Bei β'_1 ist die Einheit 0.01^d.

Die Berechnung der störenden Kräfte erfolgt ganz analog, wie in den Mitteilungen der Sternwarte Breslau Band 1, S. 83 angegeben ist, so daß eine Wiederholung des Ansatzes an dieser Stelle nicht nötig ist.

Die einzige Abweichung besteht darin, daß die Werte R' u. s. w. mit dem Faktor $k^2 m_1 \omega$, und nicht mit $k\sqrt{p}\,m$, multipliziert werden.

Mit der Jupitersmasse 1 : 1047,355 lautet dieser Faktor:

$$lg\ k^2 m_1 \omega = 5.0531290 - 10$$

oder, wie es für β_2 und β_3 zweckmäßig, in Bogensekunden

$$log\ k^{2''} m_1 \omega = 0.3675541.$$

Die Resultate der Rechnung ergeben sich wie folgt:

Datum			$10^7.\Delta\alpha_1$	$10^6.\Delta\alpha_2$	$10^6.\Delta\alpha_3$	$10^2.\beta'_1$	$\Delta\beta''_2$	$\Delta\beta''_3$
1892	Dezbr.	11.0	0.00000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1893	Januar	20	+ 0.06236	— 1.4118	— 1.5888	— 4.0744	— 22.4686	— 37.0262
	März	1	12722	2.9666	3.2552	8.2921	43.2335	75.4548
	April	10	18921	4.5281	4.8764	12.4087	61.9242	113.3311
	Mai	20	24599	6.0221	6.4193	16.3143	77.6511	149.5932
	Juni	29	29698	7.4122	7.7981	20 0414	90.9099	183.8629
	August	8	54247	8.6881	9.0419	23.6413	101.9038	216.1901
	Septbr.	17	38305	9.8541	10.1626	27.1700	111.2506	246.8533
	Oktbr.	27	41941	10.9180	11.1735	30.6946	118.9359	276.1576
	Dezbr.	6	45224	11.8956	12.0934	34.2563	125.3406	304.5022
1894	Januar	15	48210	12.8023	12.9397	37.9342	130.7091	332.2333
	Februar	24	50953	13.6547	13.7303	41.7312	135.2300	359.7544
	April	5	53494	14.4682	14.4810	45.7171	139.0636	387.1527
	Mai	15	55870	15.2585	15.2076	49.8884	142.3367	414.7304
	Juni	24	58111	16.0408	15.9252	54.2445	145.1459	442.6732
	August	3	60242	16.8293	16.6476	58.7922	147.5622	471.1147
	Septbr.	12	62287	17.6383	17.3887	63.5144	149.6307	500.1554
	Oktbr.	22	64262	18.4805	18.1610	68.3838	151.3758	529.8399
	Dezbr.	1	66183	19.3681	18.9766	73.3700	152.8066	560.1823
1895	Januar	10	68064	20.3123	19.8468	78.4289	153.9175	591.1507
	Februar	19	69917	21.3246	20.7832	83.5024	154.6960	622.6820
	März	31	71756	22.4147	21.7964	88.5172	155.1364	654.6641
	Mai	10	73589	23.5922	22.8970	93.4147	155.0879	686.9439
	Juni	19	75428	24.8648	24.0947	98.0864	154.7369	719.3242
	Juli	29	77279	26.2372	25.3947	102.4472	153.9734	751.5221
	Septbr.	7	79150	27.7149	26.8054	106 3811	152.7914	783.2427
	Oktbr.	17	81053	29.3023	28.3333	109.7619	151.1982	814.1483
	Novbr.	26	82990	31.0000	29.9821	112.4624	149.2199	843.7893
1896	Januar	5	84970	32.8082	31.7543	114.3383	146.9026	871.7420
	Februar	14	86997	34.7225	33.6487	115.2459	144.3175	897.5003
	März	25	89077	36.7365	35.6618	115.0398	141.5593	920.5323
	Mai	4	91212	38.8413	37.7872	113.5974	138.7470	940.2937
	Juni	13	93404	41.0253	40.0152	110.7822	136.0218	956.2579
	Juli	23	+ 0.95652	— 43.2730	— 42.3319	— 106.4764	— 133.5411	— 967.9287

Zur Ableitung oskulierender Elemente für 1896, Juli 23.0 bringen wir an die Ausgangselemente die Störungen

$$\Delta\alpha_1 = +\ 0.00000009565, \qquad \Delta\beta_1 = -\ 10^{d}.64764,$$
$$\Delta\alpha_2 = -\ 0.00004327, \qquad \Delta\beta_2 = -\ 2'\ 13''.54,$$
$$\Delta\alpha_3 = -\ 0.00004233, \qquad \Delta\beta_3 = -\ 16'\ 7''.93,$$

an, und erhalten die

oskulierenden Elemente

für 1896, Juli 23.0

$$\alpha_1 = 0.00004092024, \qquad \beta_1 = 1892^{a}\ 154^{d}.73091\ (= \text{Juni } 2{,}73091)$$
$$\alpha_2 = 0.02789033, \qquad \beta_2 = 331^{0}\ 36'\ 59''.88 \Big\} 1890.0$$
$$\alpha_3 = 0.02983612, \qquad \beta_3 = 14^{0}\ 0'\ 42''.72 \Big\}$$
$$\log \alpha_1 = 5.6119381 - 10, \qquad \log \alpha_3 = 8.4747424 - 10, \qquad \log \alpha_2\ 8.445\ 4536 - 10.$$

Berechnet man hieraus die Störungswerte für die gewöhnlichen Elemente, so erhält man

$$d\mu + 1''.808, \qquad dM + 2733''.01,$$
$$d\varphi + 1'\ 53''.65, \qquad d\Omega - 2'\ 13''.54,$$
$$di + 1'\ 12''.02, \qquad d\omega - 16'\ 7''.93.$$

Diese Werte lassen sich leicht berechnen. Zwiers leitete, allerdings unter Berücksichtigung der Störungen von Jupiter, Saturn und Erde für 1896, Juli 26.0 M. Z. Greenwich folgende Störungen seiner Elemntee ab:

$$d\mu + 1''.915, \qquad dM + 3525''.340,$$
$$d\varphi + 1'\ 30''.35, \qquad d\Omega - 2'\ 38''.10,$$
$$di + 1'\ 6''.30, \qquad d\omega - 17'\ 5''.64.$$

Berücksichtigt man, daß die Saturnsstörungen im Durchschnitt den zehnten Teil der Jupiterstörungen betragen, so erkennt man die Gleichartigkeit der Resultate; diese Nebeneinanderstellung soll natürlich nicht als eine Art Rechnungsprüfung, sondern nur als Vergleich dienen.

Bevor die Rechnung bis 1899 fortgesetzt wurde, wurden die Oskulationselemente auf das mittlere Äquinoktium 1900.0 übertragen, und es wurden dazu die in den mehrfach erwähnten Mitteilungen der hiesigen Sternwarte, Band 1, Seite 101 angegebenen Formeln verwendet, aus denen für die Änderungen von i, Ω, ω folgten $+\ 4''.42$, $+\ 507''.33$, $-\ 5''.03$. Der weiteren Rechnung dienten daher als Grundlage die Elemente

$$\alpha_1 = 0.4092024.10^{-4}, \qquad \beta_1 = 1892^{a}\ 154^{d}.73091,$$
$$\alpha_2 = 0.02789033.10^{-1}, \qquad \beta_2 = 331^{0}\ 45'\ 27''.21,$$
$$\alpha_3 = 0.0298361 2.10^{-1}, \qquad \beta_3 = 14\ \ 0\ \ 37.69,$$

Mittl. Äqu. 1900.0.

Die Umlaufszeit des Planeten beträgt jetzt $2511^{d}.254$, und er wird 1899 April 28,633 wieder zum Perihel zurückkehren. Die große Axe seiner Bahn hat um 0.0084708 abgenommen; dadurch ist die Entfernung von Jupiter entsprechend größer geworden, also die störenden Kräfte ihrem absoluten Wert nach kleiner, wie es auch die Zeichnung in Tafel 2 erkennen läßt.

Nachstehende Tabelle enthält die weiteren Störungen:

Datum			$10^7.\Delta\alpha_1$	$10^6.\Delta\alpha_2$	$10^6.\Delta\alpha_3$	$10^2\Delta\beta_1$	$\Delta\beta''_2$	$\Delta\beta''_3$
1896	Juli	23.0	0.00000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	Septbr.	1	+ 0.2123	— 2.1506	— 2.2408	+ 5.1955	+ 1.9544	— 6.1941
	Oktbr.	11	4283	4.3186	4.5215	11.9005	3.3526	— 7.5339
	Novbr.	20	6473	6.4832	6.8198	20.1042	4.0564	— 4.2680
	Dezbr.	30	8676	8.6223	9.1062	28.3063	3.9532	+ 4.8086
1897	Februar	8	10876	10.7040	11.3524	37.9231	2.9708	18.3092
	März	20	13052	12.7081	13.5296	48.8323	1.0872	36.2449
	April	29	15180	14.6108	15.6083	60.8477	1.6622	58.0644
	Juni	8	17234	16.3918	17.5626	73.7017	5.1866	82.9146
	Juli	18	19185	18.0341	19.3695	87.0978	9.3353	109.9567
	August	27	21004	19.5222	21.0091	100.6885	13.9139	138.1791
	Oktbr.	6	22661	20.8467	22.4672	114.0754	18.6989	166.5476
	Novbr.	15	24123	22.0004	23.7341	126.8049	23.4494	194.0232
	Dezbr.	25	25358	22.9768	24.8015	138.5323	27.9149	219.5268
1898	Februar	3	26338	23.7825	25.6778	148.6835	31.9202	242.4715
	März	15	27039	24.4198	26.3642	157.0353	35.2724	262.0182
	April	24	27435	24.8931	26.8091	163.2911	37.8546	277.6920
	Juni	3	27500	25.2107	27.2038	166.7204	29.6098	289.4249
	Juli	13	27119	25.3831	27.3832	167.1869	40.5524	296.7491
	August	22	26583	25.4228	27.4240	164.4465	40.7593	300.1049
	Oktbr.	1	25577	25.3453	27.3460	158.3219	40.3886	300.0278
	Novbr.	10	24225	25.1679	27.1703	148.7978	39.6408	297.2867
	Dezbr.	20	22568	24.9119	26.9213	135.9992	38.7668	292.9059
1899	Januar	29	20681	24.6017	26.6252	120.3735	38.0372	288.0198
	März	10	18720	24.2722	26.3172	102.5335	37.7184	283.9156
	April	19	+ 0.16711	— 23.9335	— 26.0066	+ 84.2113	— 38.0308	+ 280.8157

Mit Berücksichtigung dieser Störungen leiten wir für 1899, April 19.0 M. Z. Berlin folgendes kanonische Elementensystem ab:

$$\alpha_1 = 0.\ 4093695.10^{-4}, \qquad \beta_1 = 1892^a\ 155^\partial.5730,$$
$$\alpha_2 = 0.\ 2786640.10^{-1}, \qquad \beta_2 = 331^0\ 44'\ 49''.18,$$
$$\alpha_3 = 0.\ 2981011.10^{-1}, \qquad \beta_3 = 14^0\ 5'\ 8''.56.$$

Mittl. Äqu. 1900.0

Es bleibt noch übrig, die rückwärts bis 1892, Mai 25.0 gerechneten Störungswerte mitzuteilen:

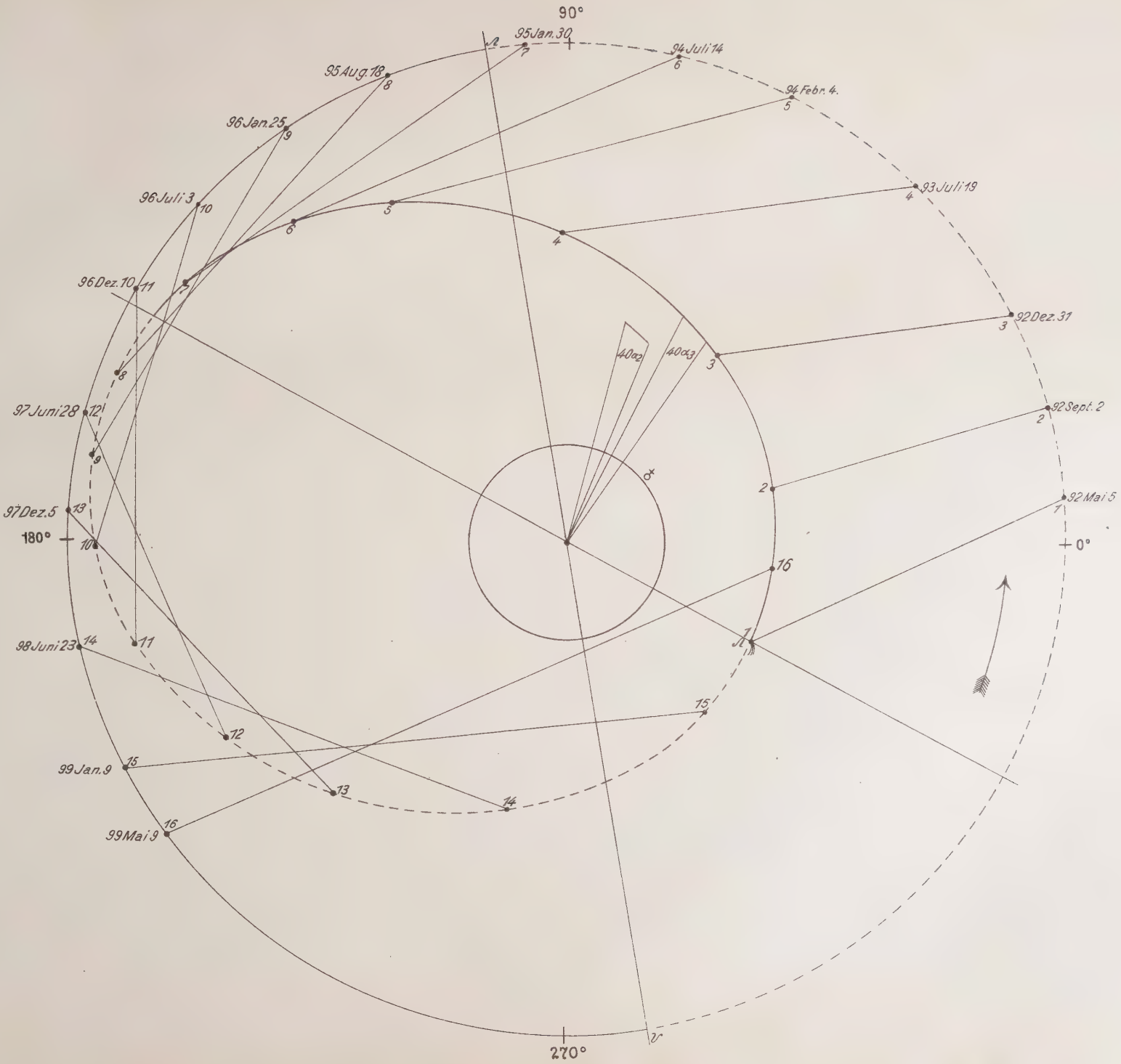
Datum	$10^7.\Delta\alpha_1$	$10^6.\Delta\alpha_2$	$10^6.\Delta\alpha_3$	$10^2.\Delta\beta_1$	$\Delta\beta''_2$	$\Delta\beta''_3$
1892 Dezbr. 11.0	0.00000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Novbr. 1	— 0.05137	+ 1.0877	+ 1.3331	+ 3.8802	+ 22.8248	+ 33.3677
Septbr. 22	07777	1.6002	2.1451	7.1145	43.2622	60.5797
August 13	06860	1.3985	2.2405	9.5823	58.6132	82.1738
Juli 4	02442	0.5638	1.6591	11.4912	67.4966	101.2539
Mai 25	04110	— 0.6127	0.6459	+ 13.1823	+ 70.7583	+ 121.0857

Aus ihnen wurden für 1892, Mai 25.0 M. Z. Berlin und M. Äqu. 1890.0 die Elemente

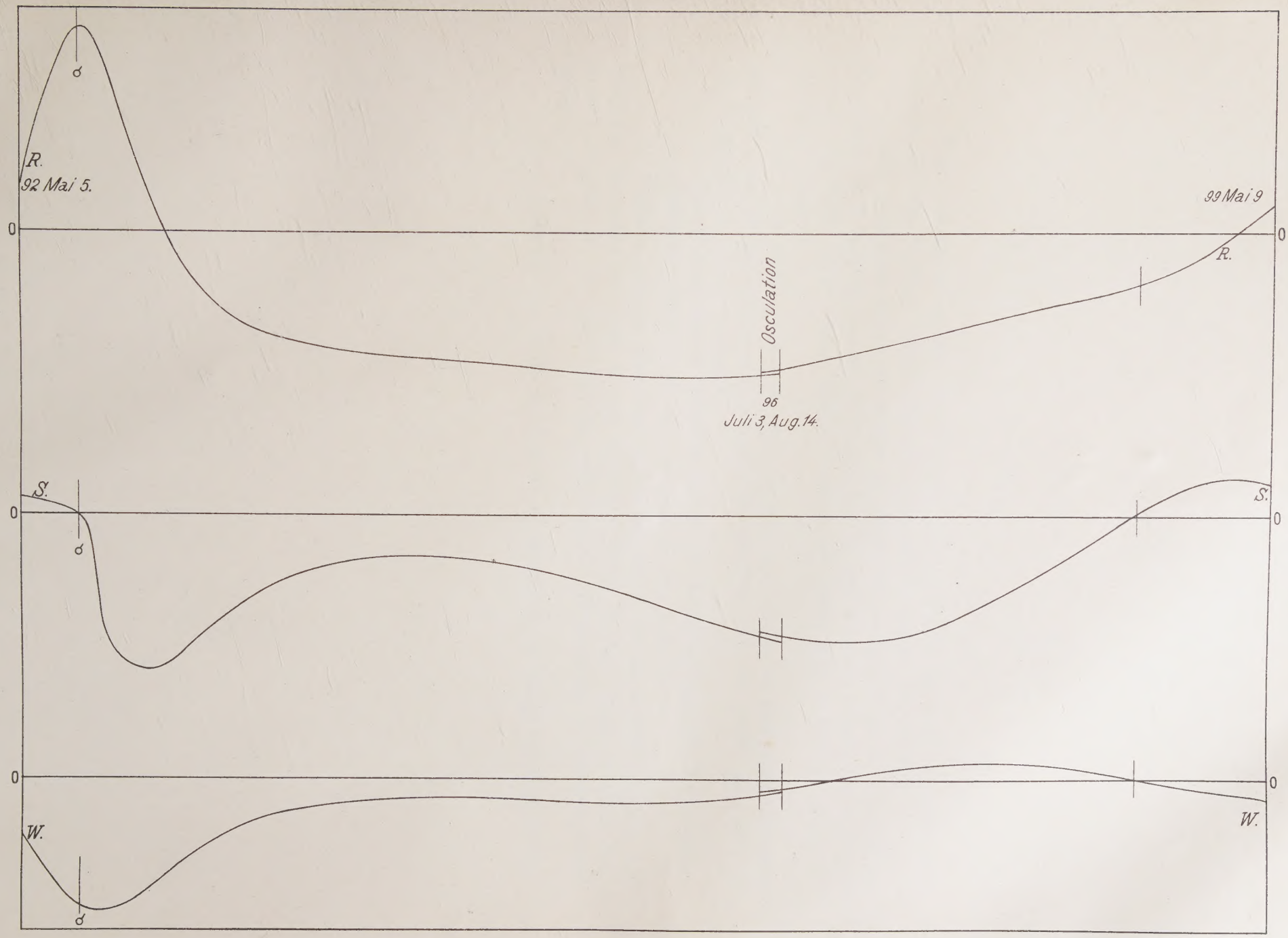
$$\alpha_1 = 0.4082870.10^{-4}, \qquad \beta_1 = 1892\ 165^d.5104,$$
$$\alpha_2 = 0.2793293.10^{-1}, \qquad \beta_2 = 331^0\ 40'\ 24''.18,$$
$$\alpha_3 = 0.2987910,10^{-1}, \qquad \beta_3 = 14^0\ 18'\ 51''.74.$$

abgeleitet.

Breslau, 1902, August 7.


90°
95 Jan. 30
94 Juli 14
94 Febr. 4.
93 Juli 19
92 Dez. 31
92 Sept. 2
92 Mai 5
0°
270°
180°
95 Aug. 18
96 Jan. 25
96 Juli 3
96 Dez. 10
97 Juni 28
97 Dez. 5
98 Juni 23
99 Jan. 9
99 Mai 9
40 α2
40 α3
α

Tafel 1.


σ
R.
92 Mai 5.
99 Mai 9
R.
0
0
Osculation
96
Juli 3, Aug. 14.
S.
S.
σ
0
0
W.
W.
σ
0.00 0.05 0.10 Bogensec.
Ordinaten
0 40 80 160 240 Tage
Abscissen

Tafel 2.

Vita.

Der Verfasser ist geboren am 31. August 1876 zu Breslau als Sohn des verstorbenen Gerichts-Sekretairs Alexander Zimmermann und dessen Ehefrau Louise, geb. Scheffler.

Nach dreijährigem Besuch der hiesigen städtischen Elementarschule Nr. 18 trat er in das Gymnasium zu St. Elisabeth ein, das er Michaelis 1896 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Dieser Anstalt und ihrem Leiter, Herrn Direktor Professor Dr. Paech wird er stets das dankbarste Andenken bewahren.

Vom W.-S. 1896/1897 bis W.-S. 1900/1901 widmete er sich an der Königlichen Universität zu Breslau vornehmlich mathematisch-astronomischen Studien. Während dieser Zeit hörte er die Vorlesungen der Herren Professoren

Bohn, F. Bruck, Caro, H. Cohn, Ebbinghaus, Franz, Freudenthal, Heydweiller, Hirt, Holdefleiss, Kückenthal, London, O. E. Meyer, Riesenfeld, Rosanes, Stern, Sturm.

Der Verfasser verdankt allen diesen Herren tiefgehende und mannigfache Anregung und Förderung. Besonders aber fühlt er sich verpflichtet, Herrn Professor Franz an dieser Stelle herzlich zu danken für die stets bewiesene, außerordentlich liebenswürdige Unterstützung seiner Studien.

Am 1. Dezember 1900 wurde der Verfasser als Assistent an die hiesige Sternwarte berufen.

Thesen.

1. Bei astronomischen Untersuchungen ist die Berücksichtigung geometrischer Methoden nach Möglichkeit zu erstreben.
2. Ein wesentlicher, wenngleich nicht direkt meßbarer Teil der Ursachen der sog. persönlichen Gleichung sind Übung und Aufmerksamkeit des Beobachters.
3. Die Einführung in die Beobachtung und das Verständnis der mit bloßem Auge sichtbaren Erscheinungen am Sternenhimmel ist in vieler Beziehung für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht von Wert.